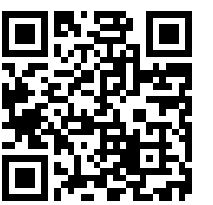
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

MATEMATIKERKONGRESSEN

I KØBENHAVN

31 AUGUST — 4 SEPTEMBER 1925

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MATHEMATICS LIBRY.

Digitized by Google

Bengt Strömgren.

DEN SJETTE SKANDINAVISKE MATEMATIKERKONGRES

Digitized by Google

MATHEMATICS LIBRY.

Digitized by Google

MATEMATIKER KONGRESSEN

I KØBENHAVN

31. AUGUST—4. SEPTEMBER

1925

DEN SJETTE SKANDINAVISKE MATEMATIKERKONGRES

BERETNING

UDGIVEN AF

KONGRESSENS ORGANISATIONSKOMITE

510.6
D11
1925

KØBENHAVN 1925

Digitized by Google

MED UNDERSTØTTELSE AF CARLSBERGFONDET

DET HOFFENSBERGSKE ETABL. KBHVN.

Digitized by Google

Kongresdeltagere foran Universitetet efter Aabningsmødet.

Digitized by Google

Digitized by Google

VED den femte skandinaviske Matematikerkongres i Helsingfors i 1922 tilkendegav Professor Harald Bohr de danske Matematikeres Ønske om at afholde den næste Kongres i København.

Til Forberedelse af denne den sjette skandinaviske Matematikerkongres dannedes i Marts 1925 en Organisationskomité bestaaende af følgende danske Matematikere:

Docent A. F. Andersen.
Professor Harald Bohr.
Professor T. Bonnesen.
Docent C. Crone.
Lektor Carl Hansen.
Professor J. Hjelmslev.
Professor C. Juel.
Professor J. Mollerup.
Professor Jakob Nielsen.
Professor Niels Nielsen.
Professor N. E. Nørlund.
Professor E. Schou.
Professor J. F. Steffensen.

Organisationskomiteen valgte Professor N. E. Nørlund til Kongressens Præsident. Som Sekretær og Kasserer fungerede henholdsvis Professor Jakob Nielsen og Professor J. F. Steffensen.

De nødvendige Midler tilvejebragtes ved Bidrag fra forskellige Sider, i Særdeleshed ved Støtte fra Carlsbergfondet, Rask-Ørsted-Fondet, Danmarks Naturvidenskabelige Samfund og de danske Livsforsikringselskaber.

I Slutningen af April udsendtes der Indbydelse til de nordiske Matematikere. Kongressen berammedes heri til Dagene fra 31. August til 3. September, men senere viste det sig paa

Digitized by Google

Grund af det store Antal af Foredragsanmeldelser nødvendigt at forøge Kongressens Varighed med en Dag. Følgende Matematikere paatog sig at modtage Anmeldelser af Foredrag:

Professor Anders Wiman, Upsala.
Professor Ernst Lindelöf, Helsingfors.
Professor Carl Störmer, Bygdö, Norge.
Professor Torsten Brodén, Lund.
Professor Torsten Carleman, Stockholm.
Professor Viggo Brun, Trondhjem.
Dr. phil. Ólafur Daníelsson, Reykjavik.
Professor N. E. Nørlund, København.

Foredragenes Varighed sattes til 45 Minutter for Meddelelser omhandlende et større Omraade og til 20 Minutter for Foredrag af mere speciel Natur. I Begyndelsen af August var det muligt at opstille og udsende et foreløbigt Program, i hvilket der dog senere maatte foretages en Del Ændringer. Det betegnedes heri som ønskeligt at benytte det franske, engelske eller tyske Sprog ved Foredragenes Publikation i Kongresberetningen.

Den nedenfor gengivne Fortegnelse over Kongresmedlemmerne viser, hvor stor en Tilslutning Kongressen fandt fra alle deltagende Lande, og lover godt for den fremtidige Udvikling af disse periodiske Stævner for Nordens Matematikere. Som Gæster deltog i nogle af Kongressens Foranstaltninger en Række udenlandske Matematikere, som opholdt sig i København i Kongresdagene, nemlig:

Professor Severi og Frue (Rom).
Professor Du Pasquier og Frue (Neuchâtel).
Professor Hardy (Oxford).
Professor Courant (Göttingen).
Professor Besicovitsch (Rusland).
Dr. H. Kneser (Göttingen).
Dr. Gumbel (Heidelberg).
Dr. Bochner (Berlin).

Digitized by Google

I det følgende gengives Kongressens Forløb. De større Foredrag er betegnet ved Kursivering af Titlen.

MANDAG DEN 31. AUGUST:

Kl. 1[45] Aabningshøjtidelighed i Universitetets Festsal, ved hvilken Undervisningsministeren, Udenrigsministeren, Universitetets Rektor, Repræsentanter for de skandinaviske Landes Legationer og for Københavns Magistrat samt en Række indbudte Gæster var til Stede. Kongressens Præsident, Professor N. E. Nørlund aabnede Mødet med den nedenfor gengivne Indledningstale og foreslog under Forsamlingens Tilslutning at vælge Professor Mittag-Leffler til Ærespræsident for Kongressen. Professor Mittag-Leffler var ved et Ildebefindende bleven forhindret i at deltage i Aabningshøjtideligheden og holde det nedenfor gengivne Foredrag om de skandinaviske og internationale Matematikermøders Oprindelse. I hans Sted holdt Professor Niels Bohr et Foredrag om »*Atomteori og Mekanik*«, som oprindelig havde været henlagt til et senere Møde paa samme Dag, og som findes gengivet i Beretningen.

Efter at Deltagerne havde drukket The i Universitetets Forhal, samledes man til det første Foredragsmøde

Kl. 4. Dirigent: Professor Lindelöf.
Professor V. Bjerknes: *Fysisk Hydrodynamik.*
Professor A. Wiman: Om klasskroppen hos Abel'ska talkroppar.

Kl. 8. Souper i den Kgl. Yachtklubs Pavillon paa Langelinie. Der blev ved denne holdt Taler af Professorerne Nørlund, Hjelmslev, Wiman, Birkeland, Lindelöf og Bonnesen. Telegrammer afsendtes til Hans Majestæt Kongen og til Statsraadet Donner samt til Professorerne Bendixson, Fredholm, Heegaard, Mellin, Phragmén og Sundman.

TIRSDAG DEN 1. SEPTEMBER:

Kl. 9. Dirigent: Professor Wiman.
Docent R. Nevanlinna: *Om nyare undersökningar över Picards sats.*

Digitized by Google

Docent Fr. Nevanlinna: En metod för undersökning av fördelningen av en analytisk funktions värden i omgivningen av ett väsentligt singulärt ställe.
Professor T. Carleman: *Singulära integralekvationer.*
Professor C. Juel: Kleins Relation mellem en algebraisk Kurves reelle Singulariteter.
Professor A. Guldberg: Omkring Markows lemma.

Kl. 2. Dirigent: Professor Störmer.
Professor J. Hjelmslev: *Den ikke-Eudoxiske Matematik.*
Docent M. Riesz: Över Cauchys principalvärde.
Dr. phil. H. A. Kramers: Om Atomer i et elektromagnetisk Bølgefelt.

Kl. 4. Besøg i Kjøbenhavns Telefonselskabs Bygning. Telefondirektør Fr. Johannsen havde indbudt Kongressens Medlemmer med Damer til at bese Telefonhuset og indtage en Forfriskning. Før Besigtigelsen af Centralen fandt Sted, indledede Telefondirektøren følgende Foredrag, som holdtes af Selskabets videnskabelige Medarbejder, cand. mag. A. K. Erlang:

Nogle Anvendelser af statistisk Ligevægts Metode i Sandsynlighedsregningen.

ONSDAG DEN 2. SEPTEMBER:

Kl. 9. Dirigent: Professor Lindeberg.
Professor H. Bohr: *Almindelige Fourier- og Dirichletudviklinger.*
Docent P. J. Myrberg: *Över diskontinuerliga grupper och automorfa funktioner av flera variabler.*
Universitetsstipendiat R. Frisch: En Bemærkning om Markows Lemma.
Docent Th. Skolem: Om gitterpunkternes fordelingstæthed i asymptotiske omgivelser af visse uendelige kurvegrene.
Professor T. Brodén: Några ord om aktuella matematiska principfrågor.
Docent Tambs-Lyche: Om betingelsen for kontinuerlige reelle løsninger av Abels funksjonalligning.

Digitized by Google

Kl. 2. Dirigent: Professor Nørlund.
Professor G. Mittag-Leffler: Weierstrass' uppfattning av irrationelt tal.
Professor N. E. Nørlund: *Om Interpolationsrækker.*
Fil. lic. F. Malmquist: Bestämning av en klass analytiska funktioner genom funktionernas värden i en uppgiven punktmängd.
Ved dette Møde talte tillige udenfor Programmet Professor G. H. Hardy om en Sætning om Rækker med positive Led med Anvendelse paa Funktionsteorien og Professor R. Courant om Variationsregning med særligt Henblik paa nyere Forskning.

Kl. 4. Fællesmøde med Danmarks Naturvidenskabelige Samfund. Dirigent: Professor Nørlund.
Professor C. Störmer: *Nordlysets problem* (Med Lysbilleder).

Kl. 7. Banket i Nimbs Selskabslokaler. En Række Telegrammer, som Kongressen havde modtaget og som oplæstes ved denne Fest, findes aftrykt nedenfor. Der blev holdt Taler af Professorerne Jakob Nielsen (i Præsidentens Forfald), Harald Bohr, Hjelmslev, Mittag-Leffler, Störmer, Johansson, Danielsson, W. Johannsen, Juel samt af Undervisningsminister, Fru Nina Bang. Professor Störmer udtalte, at de norske Matematikere nærede Ønsket om, at den næste skandinaviske Kongres maatte finde Sted i Norge i 1929, Hundredaaret for Niels Henrik Abels Død.

TORSDAG DEN 3. SEPTEMBER:

Kl. 9. Dirigent: Professor Hjelmslev.
Professor J. Nielsen: *Topologiske Problemer vedrørende lukkede Flader af endelig Slægt.*
Dr. phil. Ó. Danielsson: Om Malfattis Problem.
Docent E. Schieldrop: *Om bevægelsesligningerne for ikke-holonome systemer.*
Professor T. Bonnesen: Bevis for Kuglens Minimalegenskab.
Docent A. Næss: Rotasjon i et 4-dimensjonalt rum.
Universitetsstipendiat Tr. Nagell: Om en klasse ubestemte ligninger av tredje grad.

Digitized by Google

Kl. 2. Dirigent: Professor Guldberg.
Aktuarien fil. dr. R. Palmqvist: Om dødlighetsundersökningar baserede enbart på dödfallsuppgifter.
Professor J. F. Steffensen: *Om Aktuarvidenskabens matematiske Grundlag.*
Aktuarien fil. dr. K. G. Hagström: Ett statistiskt gränsproblem.
Universitetsstipendiat R. Frisch: Thieleske halvinvarianter og momenter av højere orden.
Cand. mag., Frk. Inge Lehmann: Om Nøjagtigheden ved Interpolation.
Professor Du Pasquier gjorde i Tilknytning til Professor Steffensens Foredrag opmærksom paa, at Euler indtager en fremtrædende Plads blandt Aktuarvidenskabens Pionerer, som det fremgaar af 7de Bind, Serie I af Leonhardi Euleri Opera Omnia. Professor Du Pasquier, som har besørget Udgivelsen af det nævnte Bind, omtalte nærmere Omfanget af og Vanskelighederne ved denne store Udgave af Eulers samlede Værker, som La Société Helvétique des Sciences Naturelles allerede har formaaet at føre langt frem.

Kl. 4[45]. Dirigent: Professor Nørlund.
Professor E. Strömgren: Vort nuværende Kendskab til Bevægelsesformerne i Trelegemerproblemet.
Professor R. Birkeland: *Om dannelse av grupper.*

FREDAG DEN 4. SEPTEMBER:

Kl. 9. Dirigent: Professor H. Bohr.
Docent H. Cramér: *Den matematiska statistikens serieutvecklingar.*
Dr. phil. Ø. Ore: *Om teorien for de algebraiske tal.*
Professor J. W. Lindeberg: Om korrelationen.
Professor J. Mollerup: Om Bestemmelse af Egenværdier og Egenfunktioner til en Funktion af to Variable med Hensyn til en given Kerne K (s, t).
Docent A. F. Andersen: Om Talfølger, der er »regulære af en bestemt positiv Orden«.

Kl. 2. Dirigent: Professor Birkeland.
Docent N. Zeilon: *Blandade potentialproblem i hydrodynamiken.*

Digitized by Google

Lektor O. M. Thalberg: Om den geometriske sammenhæng mellem tangenterne i visse algebraiske kurvers flerfoldighedspunkter.

Professor E. Schou: Forsøg paa Udvidelse af Begrebet: Analytiske Funktioner.

Docent A. Uhler: En generalisering av de zetafuchsiska funktionerna.

Docent A. Næss: En potensialvektor multiplisert med en skalar funksjon (en dobbelt skalar vektor) generalisert til et 4-dimensjonalt rum.

Professor J. Hjelmslev forelagde en ny Lærebog i elementær Aritmetik.

Kl. 8. Afsluttende Sammenkomst i »Admiral Gjeddes Gaard«.

Kongressens Damer besaa Kristiansborg Slot under Ledelse af Slotsarkitekt Thorvald Jørgensen og aflagde efter Indbydelse fra Direktør Fr. Dalgas et Besøg paa den kgl. Porcelainsfabrik.

Fra Hans Majestæt Kongen indløb følgende Telegram til Kongressen:

»Min hjertelige Tak og Hilsen med bedste Ønsker for Kongressens Forløb. Christian R.«

Endvidere modtog Kongressens Præsident følgende Telegrammer:

Beklagande ej kunna personligen närvara, sända matematikerkongressen våra varma hälsningar och bästa lyckönskningar Donner, Sundman.

Med uppriktigt beklagande av att vara förhindrad närvara vid kongressen och med varmaste tack för den mig översända vänliga hälsningen ber jag att genom dig få framföra mina bästa välönskningar för ett rikt givande utbyte av den sjätte skandinaviska matematikerkongressens förhandlingar.

Ivar Bendixson.

Digitized by Google

Med tack för vänlig hälsning sänder jag matematikerkongressen mina bästa välönskningar. Fredholm.

Hjärtligt tack för hälsningen. Ledsen att ej kunna vara med. Phragmén.

Med hjertelig Tak for den venlige Hilsen og beklagende Fraværet sender jeg de bedste Ønsker for Kongressen.

Poul Heegaard.

Digitized by Google

INDLEDNINGSTALE VED AABNINGSMØDET

Af *N. E. Nørlund.*

DEN Videnskab, hvis Dyrkere i Dag er stævnet til Møde paa Københavns Universitet, er en af de ældste, og jeg kan sige, en af de ærværdigste blandt alle Videnskaber. Vi kan følge Sporene af det matematiske Studium langt tilbage i den graa Oldtid. Allerede hos Babylonierne var Regnekunsten højt udviklet. I Ruinerne af chaldæiske Templer har man fundet et stort Antal Lertavler fra det 2. og 3. Aartusinde f. Kr., som indeholder Multiplikations- og Divisionstabeller, samt Tabeller over Kvadrat- og Kubiktallene skrevne i 60-Talsystemet. Det er fra Babylonierne, at den endnu brugelige Deling af Cirklen i Grader, Minuter og Sekunder efter et 60-Talsystem skriver sig.

Ogsaa Ægypterne var, allerede for fire tusinde Aar siden, vel bevandrede i Aritmetiken. Som Vidnesbyrd herom kan bl. a. anføres Ahmes Regnebog, et ældgammelt Papyrushaandskrift. Men ved Nilens Bredder var det dog navnlig den praktiske Geometri, som tidligt udvikledes. De ægyptiske Templer og Pyramider med deres geometriske Ornamentik og nøjagtige Orientering er et talende Bevis herfor.

Nilens periodisk tilbagevendende Oversvømmelser og den høje Værdi af de frugtbare oversvømmede Landstrækninger maatte føre til Udviklingen af en nøjagtig Landmaaling. De ægyptiske Harpedonapter havde til Opgave at sikre, at hver Mand efter Oversvømmelsen fik det Landomraade, som tilkom ham. Det har saaledes været Udmaalingen af Jordens Overflade, Geodæsien, som i Ægypten førte til Udviklingen af Geometrien, medens det hos Babylonierne var Studiet af Himmellegemerne, Astronomien, som førte til Udviklingen af Aritmetiken. Vi ser altsaa, at der paa et meget tidligt Stadium fandt en Vekselvirkning Sted mellem den rene og den anvendte Matematik. Denne Vekselvirkning kan vi følge overalt gennem Matematikens Hi-

Digitized by Google

storie til den største Gavn for vor Videnskab, og man skal derfor ikke tro paa Dogmet om Matematikens Uafhængighed af Erfaringen.

Ægypterne og Babylonierne har været Grækernes Læremestre i Matematiken. Men Grækerne nøjedes ikke med at tilegne sig de matematiske Erfaringer og Lærdomme, som de kunde hente i Faraoernes Land. De skabte deraf noget helt Nyt, nemlig en abstrakt Videnskab. Geometrien blev i Grækernes Haand til en stringent Lærebygning, som man igennem mange Aarhundreder har beundret som et af de mest fuldkomne Menneskeværker. Euklids Elementer er vel, næst efter Bibelen, den Bog, som har oplevet det største Antal Udgaver og Oversættelser, og som har øvet den største Indflydelse paa Aandslivet.

Det var et Karaktertræk hos Grækerne, at de af deres Erfaringer søgte at udkrystallisere et Ideal. Den græske Matematik fik derfor en spekulativ Karakter, den handler om rene Begreber, som ikke eksisterer i den virkelige Verden. Grækerne forstod, at selv om man fastholdt Ægypternes Maade at maale og regne paa, saa kunde man angaaende de samme Figurer, med de samme Ord sige helt andre Ting. Platon siger: Ingen, som forstaar sig paa Geometri, vil bestride, at denne Videnskabs Maal ikke har nogen Sammenhæng med det Sprog, som de, der behandler den, taler. Deres Sprog er meget bekvemt, de taler om at kvadrere, forlænge, tilføje osv., som om det var noget, de virkelig udførte, og som om deres Beviser havde et praktisk Formaal. Men denne Videnskab har absolut ikke andet Maal end Erkendelse af det, som altid er. Videnskabens Rolle er ingenlunde, som de Uvidende kunde tro, at tjene Købmænd og Handlende ved deres Køb og Salg, men at lette Sjælen den Vej, som skal føre den fra den jordiske Sfære til en Betragtning af de evige Sandheder. Platon var uden Tvivl Genstand for en Illusion, men denne Illusion har været nyttig for Geometriens Udvikling, den bragte den ud over det primitive Forsøgsstadium.

En af de interessanteste Faser i Udviklingen af den græske Matematik er den Konflikt, som opstod hos Pythagoræerne ved Studiet af Begreberne Tal og Størrelse, og som førte til Indførelsen af de irrationale Størrelser. Af den pythagoræiske Læresætning følger, at hvis de to Sider i en retvinklet Trekant er lige store og f. Eks. har Længden 1, saa vil den tredje Sides Længde ikke kunne udtrykkes ved noget Tal. Grækerne forstod til fulde

Digitized by Google

at vurdere Betydningen af denne vigtige Opdagelse. Uendelighedsbegrebet holdt dermed sit Indtog i Matematiken, og det har givet Anledning til en Række frugtbare Diskussioner, som er blevet fortsat helt op til vore Dage. Jeg skal minde om Exhaustionsbeviserne, som vi træffer hos Eudoxos og Euklid, og Oldtidens største Matematiker Archimedes opererer paa en beundringsværdig Maade med infinitesimale Betragtninger. De uendelig store og de uendelig smaa Størrelser har siden den Tid spillet en fremtrædende Rolle i Matematiken. Det uendelige har en sær og ejendommelig Tiltrækningskraft paa mange Mennesker, maaske fordi det tangerer det mystiske og dunkle. Uendelighedsbegrebet har som intet andet Begreb virket befrugtende paa Matematikens Udvikling, men det har ogsaa voldet Matematikerne de største principielle Vanskeligheder og udsat dem for Farer, som de ingenlunde altid har vidst at undgaa. Det er den moderne Matematiks største Fortjeneste, at den tilsidst, efter mange Aarhundreders møjsommeligt Arbejde, har formaaet at borteliminere de uendelige Størrelser og derved saa at sige har klarlagt Uendelighedsbegrebets Indhold, idet den har vist, at naar vi uden Frygt taler om uendelig store og uendelig smaa Størrelser, saa er det mere en Talemaade eller, om man vil, et kort og bekvemt Udtryk for visse mere sammensatte Operationer med endelige Størrelser, og det er disse sidste vi mener. Denne Talemaade rummer sine Farer som Sproget selv, naar det misbruges, men den er ikke desto mindre hensigtsmæssig og, man kan gerne sige, uundværlig over for de uhyre komplicerede Fænomener, som vi skal behandle.

De græske Tænkere har skabt et bredt Grundlag for Matematiken og ved Indførelsen af det logiske Element, Fordringen om det strenge Bevis, har de for alle Tider sat deres Præg paa Matematiken; det er interessant at se, hvilken klar Forstaaelse Grækerne har haft af de bærende Principer i vor Videnskab. Jeg skal nævne et enkelt Eksempel. Henri Poincaré har en Gang sagt, at for Matematikeren gælder det fremfor alt om at se bort fra Indholdet og kun bryde sig om Formen, som er det væsentlige. Det gælder om at opdage de dybtliggende Analogier, som Øjet ikke ser, men som Tanken kan udrede. Det er et af Matematikerens Prærogativer, at han formaar at benævne forskellige Ting med et og samme Navn, Ting, som er forskellige i Henseende til Indhold, men identiske i Henseende til Form. Den-

Digitized by Google

ne samme Tanke finder vi udtalt hos Pythagoræerne, som betragtede Formen som Tingenes Væsen. Bag ved de mange vekslende Fænomener søgte de at finde den herskende Lov, som udtrykkes ved formelle Relationer mellem Størrelser og Tal. Pythagoras gjorde derfor Tallet til alle Tings Princip, idet han hævdede den berømte Formel »*Tingene er Tal*«. Der ligger en dyb Sandhed i denne gamle Formel, som udtrykker, at Relationerne mellem Tingene er det eneste, som vi kan tillægge objektiv Værdi.

Næst efter Grækenland maa Indien nævnes som et Land, hvor Matematiken fra gammel Tid er blevet dyrket. Vi træffer der en særlig Forkærlighed for Regning med store Tal. Vi skylder Inderne det for Regnekunsten saa betydningsfulde Positionssystem, som nu er blevet hver Mands Eje, samt vigtige Bidrag til Studiet af de ubestemte Ligninger.

Indernes og Grækernes matematiske Lærdomme blev af Araberne bragt til Vesteuropa. Kun langsomt formaaede man her at tilegne sig disse Lærdomme, men efterhaanden trængte de igennem, og i Renaissancens Fædreland, Norditalien, træffer vi nu en ny Udviklingsperiode for Matematiken, som i Frugtbarhed kan sammenlignes med den græske Matematiks Kulminationstid. Trigonometrien udskiller sig fra Astronomien og Algebraen fra Geometrien. Gennembruddet kom med del Ferros og Tartaglias Løsning af Trediegradsligningen, en Opgave som Oldtiden ikke havde kunnet magte. I Algebraen udvikles et mere og mere fuldkomment System af Betegnelser, og dermed skabes dette klare og koncise Tegnsprog, som betyder en stor Økonomi for Tanken, og som i sig indeholder Spiren til nye Fremskridt.

I det 17. Aarhundrede grundlægger Galilei Dynamiken og Descartes den analytiske Geometri. Dermed var Vejen banet for den mægtige Udvikling af Analysen, som fandt Sted i den følgende Tid. Under Indflydelse af Archimedes og Galileis Arbejder udvikler Kepler, Huygens og Newton Bevægelseslæren, og vi føres til den *mekaniske* Forklaring af Naturfænomenerne, som faar sit Udtryk i, at Naturfænomenerne er bestemt ved Relationer mellem ubekendte Funktioner og deres Differentialkvotienter, de saakaldte Differentialligninger. Ved at løse disse Ligninger skulde man da blive i Stand til at forklare det forgangne og forudsige det kommende. Dette Resultat, der maa betegnes som et af de største Fremskridt i de eksakte Videnskabers Historie, gav straks

Digitized by Google

Anledning til en noget overdreven Optimisme. Men de første Skridt var ogsaa lovende nok. Det er bekendt, hvorledes Newton af de Keplerske Love afledte Tiltrækningsloven, som har sat os i Stand til gennem lange Tider at forudberegne Himmellegemernes Bevægelser.

Omtrent samtidig var Eudoxos og Archimedes infinitesimale Undersøgelser blevet genoptaget ved Galileis, Cavalieris og Keplers Arbejder; hos Fermat og Pascal antager de mere fast Form, idet disse Geometre viste den største Færdighed i Løsning af saadanne Opgaver, som beror paa Differentiation og Integration, inden Differential- og Integralregningen endnu var blevet udviklet som en selvstændig Disciplin af Newton og Leibniz. Vi kommer nu ind i en Periode, som kan karakteriseres ved d'Alemberts bekendte Ord: »allez en avant et la foi vous viendra«. Infinitesimalregningen viste sig ved sine Anvendelser paa Geometri, Mekanik og Fysik saa frugtbar, at man uden at bryde sig om egentlige Beviser gik rask fremad, ofte med Held, men med en Dristighed, som er langt fra den omsorgsfulde Nøjagtighed, som vi træffer hos den moderne Matematiker. Funktionsbegrebet, som danner Grundlaget for Analysen, optræder først eksplicit hos Leibniz og udformes gennem Lagranges, Eulers og Cauchys Arbejder. Indførelsen af de komplekse Variable udvider Analysens Omraade. De Funktioner af en kompleks Variabel, som har en entydig bestemt Differentialkvotient, kan altid fremstilles ved Potensrækker. Dette Resultat begrundede den særlige Betydning, som tilkommer disse Udviklinger, og som Lagrange forgæves havde gjort sig saa store Anstrengelser for at vise, idet han begrænsede sig til at betragte reelle Variable. Ved Cauchys, Riemanns og Weierstrass Arbejder blev de analytiske Funktioners Teori til et af de vigtigste Afsnit af Analysen. Det er navnlig den Cauchyske Integralsætning og det derpaa baserede Lindelöf-Phragménske Theorem, som paa dette Omraade har ført til saa mange smukke Opdagelser.

Analysen griber nu ogsaa ind i Talteorien. Denne Videnskab, som Gauss har kaldet Matematikens Dronning, havde efter Udgivelsen af Fermats Kommentarer til Diophant i stigende Grad tiltrukket sig Matematikernes Interesse. I det 18. Aarhundrede udvikles de bekendte Sætninger om Tallenes Delbarhed, om de kvadratiske Rester og højere Potensrester, om de ubestemte Ligninger og om de binære og ternære Former. I Aaret 1801 udkom-

Digitized by Google

mer Gauss berømte Værk: »Disqvisitiones arithmeticae«, som grundlægger den moderne Talteori. I det 19. Aarhundrede udvikles en helt ny Arithmetik, hvori Lovene om Tallenes Delbarhed først fremtræder under en helt anden Form end i den sædvanlige Arithmetik. De hele Tal kan her dekomponeres i Primfaktorer paa flere forskellige Maader, men ved Dedekinds geniale Indførelse af »de ideale Tal« lykkes det at genfinde de samme simple Love som i den sædvanlige Arithmetik. Nye Fremskridt naas ved Minkowskis Indførelse af geometriske Betragtninger i Talteorien, men frem for alt ved Hermites Indførelse af de kontinuerte Variable i det diskontinuertes Omraade. Denne lykkelige Tanke har ført til en kraftig Udvikling af Talteorien og givet den en central Stilling inden for vor Videnskab. Ikke mindst her fra Danmark er der i de sidste Aar fremkommet en Række grundlæggende Arbejder, som viser, hvilke smukke Resultater man kan naa ved at anvende Analysen paa Talteorien.

I det 17. og 18. Aarhundrede havde Analysen væsentlig været et Hjælpemiddel for Geometrien, for Astronomien, for Mekaniken og for Fysiken. Næsten alle de analytiske Problemer, som man behandlede, var direkte stillede af en af disse Videnskaber. Infinitesimalregningens store Frugtbarhed over for Anvendelser paa Geometri og Naturvidenskab havde fremkaldt en næsten ubegrænset Tillid til de analytiske Metoder og berettigede til en vis Grad den Optimisme, som laa i d'Alemberts før citerede Ord. Man var gaaet rask frem og havde fundet mange vigtige Resultater uden at bryde sig synderligt om de Principer, de var baserede paa. I det 19. Aarhundrede møder vi nu helt nye Strømninger i Matematiken. Analysen sondrer sig ud som en selvstændig Disciplin, som man dyrker for dens egen Skyld og uden at tænke paa eventuelle Anvendelser. Samtidig begynder man at reagere mod de foregaaende Tiders alt for store Tillidsfuldhed. Reaktionen kom først langsomt og tøvende, men den satte snart nok ind med en saa voldsom Kraft, at den kritiske Revision af Principerne blev det mest karakteristiske Træk for den kommende Tids Udvikling. Kritiken begyndte med Gauss, Abel og Cauchy, og den har foreløbig naaet sit Højdepunkt hos Weierstrass og Hilbert.

Den ikke tilstrækkelig begrundede Infinitesimalregning havde indført et uklart Element i Matematiken og ført til Fejlslut-

Digitized by Google

ninger af alvorlig Art i den mest eksakte af alle Videnskaber, saa at man tilsidst følte sig paa gyngende Grund. Det er Weierstrass uvisnelige Fortjeneste at have renset Analysen for alle uklare Forestillinger om det uendelige. I Weierstrass Fremstilling af Analysen er de infinitesimale Størrelser elimineret og de bekendte Betragtninger desangaaende henførte til Relationer mellem endelige Størrelser. Men hos Weierstrass optræder det uendelige endnu i mere skjult Form i Begrebet: Systemet af alle reelle Tal. Her sætter nu Hilberts Kritik ind i en i disse Dage udkommen Afhandling: »Über das Unendliche«, idet han viser, at det uendelige, overalt hvor det fremtræder, blot er noget tilsyneladende, og at vore Slutninger vedrørende infinitesimale Størrelser kan erstattes med endelige Processer, som yder det samme. Det uendelige er en Idé, som vi indenfor visse bestemte Grænser kan operere med. Dermed viser Hilbert ogsaa Vejen til Løsning af Cantors berømte Problem om Kontinuets Mægtighed.

Denne korte og meget fragmentariske historiske Oversigt vil efterlade et Indtryk af, at den moderne Matematik er bygget op ved mange Generationers ihærdige Arbejde. Dette egenartede Forskerarbejde har som Regel været betinget af, at en lang Tradition havde skabt det rette Milieu. Om man nu holder sig dette for Øje og derefter kaster Blikket ud over denne Forsamling, som rummer saa mange fremragende Matematikere, hvoriblandt nogle, som har været banebrydende inden for deres Videnskab, saa skulde man tro, at vi ogsaa her i Norden maatte have en lang Tradition at se tilbage paa inden for Matematikens Omraade. Dette Indtryk forstærkes, naar man ser paa Programmet for denne Kongres, et Program der er saa rigt og afvekslende som ved nogen international Kongres. Og dog forholder det sig ikke saaledes. Tyngdepunktet for det matematiske Studium laa snart i Ægypten, snart i Grækenland, snart i Indien, snart i Italien, snart i Frankrig, England eller Tyskland, men aldrig i Norden. I de forgangne Tiders Forskerarbejde har skandinaviske Matematikere kun taget ringe Del. Vel har Samuel Klingenstierna i Uppsala og Jens Kraft i Sorø været udmærkede Lærere i Matematik, vel kan man nævne enkelte lidt større Navne som Degen, Bring, Malmsten og Wessel, men saa fattigt har det været, at i Tiden helt op til vore Dage har der kun været én skandinavisk

Digitized by Google

Matematiker, som har øvet en virkelig Indflydelse paa vor Videnskabs Udvikling. Dette har til Gengæld ogsaa været en Forsker af aller første Rang, nemlig Nordmanden Niels Henrik Abel. Vi ser med Beundring paa Abels geniale Værk, men han var som en Meteor paa den nordiske Himmel. Efter Abels alt for tidlige Død vantrivedes Matematiken atter i Norden. Dette er saa meget mere paafaldende som vi paa andre Omraader kan rose os af tidligt at have været med i den videnskabelige Udvikling. Her i Danmark kan vi med Stolthed nævne Navne som Tycho Brahe, Ole Rømer og Hans Christian Ørsted. Men inden for Matematiken var det først for omtrent et halvt Hundrede Aar siden, at den Udvikling begyndte, som har muliggjort Afholdelsen af skandinaviske Matematikerkongresser. Ved den Tid fremtraadte der nemlig rundt omkring i de skandinaviske Lande en Række fremragende Matematikere. Det var i Norge Sophus Lie og Carl Anton Bjerknes, det var i Danmark Zeuthen og Thiele, det var i Sverige Bäcklund og frem for alt Mittag-Leffler, der ogsaa en Tid virkede i Finland som Professor ved Helsingfors Universitet, hvor allerede Lorens Leonhard Lindelöf havde udøvet en betydningsfuld Virksomhed. Disse Mænd har ved deres Forskergerning og ved den Lærervirksomhed, de har udøvet, givet Stødet til en Udvikling af Matematiken i Norden, som har været saa intensiv og givet saa glimrende Resultater, at man næsten blændes ved den bratte Overgang fra Mørke til Lys. Programmet for selve denne Kongres optager ikke mindre end 46 Foredrag fra alle de mest aktuelle Omraader af Matematiken. Dette Program giver et stærkt Indtryk af i hvor høj Grad nordiske Videnskabsmænd nu formaar at medvirke ved Matematikens Udvikling. Naar de nordiske Lande forener sig til en Enhed, staar de ikke tilbage for noget Land.

Blandt de Mænd, som jeg før nævnede, er Professor Mittag-Leffler den eneste, som endnu er iblandt os. Mittag-Leffler har indført Studiet af den Weierstrasske Funktionsteori i Sverige og i Finland, og han har derved, som allerede antydet, direkte eller indirekte fremkaldt en lang Række glimrende funktionsteoretiske Arbejder. Blandt Mittag-Lefflers egne Undersøgelser maa navnlig nævnes det saakaldte »Mittag-Lefflerske Theorem«, som nu figurerer i alle Lærebøger. Han har derigennem gjort de entydige analytiske Funktioner af én Variabel til en vis Grad ligesaa tilgængelige for os som de rationale Funktioner.

Digitized by Google

Han har ogsaa fundet Løsningen af et andet fundamentalt Problem inden for Funktionsteorien. Hos Weierstrass defineres den analytiske Funktion som bekendt ved en Potensrække, men denne fremstiller i Almindelighed kun Funktionen inden for en Del af dens Eksistensomraade. For at finde Funktionen inden for hele dens Eksistensomraade maatte man tidligere tage sin Tilflugt til en yderst kompliceret og uoverskuelig Proces. Men Mittag-Leffler har vist, hvorledes man ud fra en given Potensrække kan aflede et simpelt analytisk Udtryk, som fremstiller en entydig Gren af Funktionen i hele dens Omraade.

Mittag-Leffler har grundlagt og i 43 Aar udgivet Acta mathematica, som under hans Ledelse er blevet det fornemste matematiske Tidsskrift. Acta mathematica har opretholdt en meget høj Standard, og det har altid været fuldt ud internationalt, selv under Verdenskrigen, hvor det Side om Side bragte Afhandlinger af tyske, franske og engelske Videnskabsmænd. Dette Tidsskrift har ogsaa i høj Grad bidraget til at gøre skandinaviske Matematikeres Arbejder kendte i Udlandet.

Jeg vil ogsaa nævne, at det var Mittag-Leffler, som i 1909 tog Initiativet til Afholdelsen af den første skandinaviske Matematikerkongres.

For at give Udtryk for hvad vi skylder denne fremragende Videnskabsmand, skal jeg stille Forslag om, at Professor Mittag-Leffler vælges til Ærespræsident for denne Kongres.

Paa Organisationskomiteens Vegne byder jeg vore udenlandske Gæster velkommen, og jeg udtaler Komiteens Glæde over, at saa mange har villet efterkomme vor Indbydelse.

Vi glæder os ogsaa over, at Medlemmer af Regeringen samt Repræsentanter for de nordiske Landes Legationer, for Undervisningsministeriet og for Københavns Magistrat ved at give Møde her i Dag har villet hædre vore Gæster.

Vi takker Universitetets Rektor, fordi han har stillet de nødvendige Lokaler til Raadighed for Kongressens Forhandlinger.

Vi takker Carlsbergfondet, Rask-Ørsted-Fondet, Danmarks Naturvidenskabelige Samfund og de danske Livsforsikringsselskaber, fordi de ved at yde os Støtte har muliggjort Afholdelsen af denne Kongres og Udgivelsen af en Kongresberetning. Vi lægger særlig Vægt paa at kunne udgive denne Beretning, fordi den vil give Udlandet og os selv et godt Billede af, hvad

Digitized by Google

de nordiske Landes Matematikere formaar. Jeg skal derfor anmode d'Herrer Foredragsholdere om snarest mulig efter Foredragene at aflevere deres Manuskript til Kongressens Sekretær, Professor Jakob Nielsen.

Blandt de mange, som vi har den Ære at se her i Dag, er der to, som vi savner, to Matematikere som Døden har bortrevet siden vort sidste Møde, nemlig Professor Helge von Koch og Telefoningeniør, Dr. Jensen.

Helge von Koch blev i en Alder af 22 Aar Docent og kun 25 Aar gammel Professor i ren Matematik i Stockholm. Hans Speciale var Teorien for Determinanter af uendelig høj Orden, og de fleste Resultater inden for dette Omraade af Analysen skyldes ham. I Fortsættelse af Poincarés Arbejder har han søgt at finde en aritmetisk Fremstilling af Løsningerne til en lineær Differentialligning med rationale Koefficienter, og han har givet en fuldstændig Løsning af dette Problem ved Hjælp af uendelige Determinanter. Han har ogsaa anvendt de uendelige Determinanter til Løsning af forskellige Funktionalligninger, navnlig Differentialligninger af uendelig høj Orden, samt til Løsning af uendelig mange lineære Ligninger med uendelig mange ubekendte.

von Koch har endvidere givet Bidrag til Studiet af Primtalsproblemet, og han har arbejdet videre med de før nævnte Undersøgelser af Mittag-Leffler om analytisk Fortsættelse af en Funktion. Helge von Koch døde den 11. Marts 1924; alle der har kendt ham, vil bevare Mindet af en sjeldent fin og sympatisk Personlighed.

Dr. Jensen har aldrig beklædt nogen akademisk Stilling og han har ikke engang faaet nogen Universitetsuddannelse. Men ved Selvstudium erhvervede han sig tidligt omfattende funktionsteoretiske Kundskaber, og ved sine talrige Foredrag i Matematisk Forening og i Videnskabernes Selskab har han øvet en betydelig Indflydelse paa det matematiske Studium i Danmark. Han har navnlig bidraget til at gøre Weierstrass' funktionsteoretiske Arbejder kendt her i Landet. Jensen var en original og skarpsindig Matematiker. Hans Navn vil altid forblive knyttet til det bekendte Teorem han har fundet angaaende Nulpunkterne for de hele transcendente Funktioner, samt til Teorien for de konvekse Funktioner. Jensen har endvidere givet værdifulde Bi-

Digitized by Google

drag til Læren om Grænseværdier og Rækker, men flere af hans herhenhørende Resultater er blevet fundet og offentliggjort af andre, inden han selv naaede at faa dem publiceret.

De fleste af Jensens Undersøgelser kresede om den Riemannske ζ-Funktion. Han forsøgte at bevise den bekendte Riemannske Formodning om ζ-Funktionens Nulpunkter, men desværre lykkedes det ham ikke at tilendeføre sine Undersøgelser desangaaende. Disse mangeaarige Arbejder har dog sat Frugt i en Række Sætninger om algebraiske Ligninger samt Udvidelser af saadanne Sætninger til hele transcendente Funktioner.

Jensen blev i 1918 Æresdoktor ved Lunds Universitet; han døde den 5. Marts 1925. Ved sin Bortgang har han efterladt en tom Plads i de danske Matematikeres Rækker, som det vil blive vanskeligt at udfylde.

Digitized by Google

Digitized by Google

TALE AF PROFESSOR G. MITTAG-LEFFLER

Ärade församling!

I anslutning till Professor Nørlunds intressanta överblick över matematikens utveckling från den kända historiens början intill vår nära tid, har jag efter överenskommelse med honom valt en skildring av de yttre dragen i »tillblivelsen och utvecklingen intill vår tid av de internationella och skandinaviska matematikerkongresserna.«

Den ställning Ni vid denna kongress givit mig medför emellertid, som första rättighet och skyldighet, att hembära vårt tack till alla dem, genom vilka tillblivelsen av den 6te skandinaviska matematikerkongressen blivit verklighet. Jag ber härvid att i främsta rummet få hänvända vårt tack til Professor Nørlund, kongressens president, vars mångprövade förmåga som ledare och organisatör så många gånger ställt honom i främsta planet vid skapandet, uphållandet och återuppbyggandet av så månget olikartat vetenskapligt värv.

Jag nödgas börja med en ursäkt för att denna redogörelse i högre grad än för många kan synas tillbörligt, får en i viss mån personlig färg. I de flesta fall — dock icke alla — finnas i tryck tillgängliga officiella redogörelser, och en sammanfattning av dessa kan var och en göra, som blott har tillgång till ett tillräckligt omfattande bibliotek. Då jag emellertid torde vara den ende bland de närvarande, som varit med överallt och ända från början av den utveckling, det gäller att skildra, har jag vågat tro, att min uppgift borde vara att även i vissa fall framföra min personliga syn på densamma, givetvis dock utan att göra några som hälst anspråk på, att denna kommer att delas av andra. Med denna uppfattning har jag trott det bliva nödvändigt att även med några ord beröra mitt eget utgångsstadium.

Det fransk-tyska kriget, inlett genom Frankrikes krigsförklaring 19. juli 1870, formellt avslutat genom fredsfördraget i

Digitized by Google

Frankfurt år 1871, men först september 1873 slutlikviderat genom sista avbetalningen av Frankrikes krigsskuld jämte utrymmandet av samtliga av Tyskland besatta områden, hade kvarlämnat en spänning i allmänna tänkesättet, ej blott inom de krigförande, utan även inom neutrala länder, där sympatierna följt den ena eller andra av de krigförande.

Efter att våren 1872 ha erhållit fil. doktorsgraden vid Uppsala universitet, blev jag året därpå i tillfälle att som universitetsstipendiat anträda en vetenskaplig treårig utländsk resa. Carl Johan Malmsten hade, allt sedan han år 1842 tillträdde professionen i matematik i Uppsala, med glänsande framställningskonst och högspänd entusiasm tagit itu med uppgiften att återupprätta det matematiska studiet från det djupa förfall, vari detsamma råkat under de hundrade år, som förflutit efter den lysande perioden under *Klingenstierna*. Grunden för den analytiska delen av Malmstens undervisning fanns hos Abel och Cauchy. Som nybliven student blev jag den lycklige ägaren av Cauchys för analysen epokgörande arbete »Cours d'analyse de l'École polytechnique de l'année 1821«, vars huvudsats var kriteriet för avgörande om en potensseries konvergens eller divergens. *(Hadamard,* för vilken Cauchy's Cours d'Analyse säkerligen var okänd, använde utan citat samt bevisade satsen i sin viktiga doktorsdissertation. — Satsen nämndes i Frankrike att börja med Hadamards sats, men sedan Phragmén påpekat rätta förhållandet Cauchy's av Hadamard nyupptäckta sats).

Det blev därföre naturligt, att jag under intrycket av min bekantskap med Cauchy började min resa i Paris, där jag speciellt vid åhörande av *Hermite*'s föreläsningar över elliptiska funktioner tillbragte en stor del av dess första år, härvid i nära beröring med Hermite, Chasles, Liouville, Briot, Bouquet, Bonnet och andra inom den lysande plejad av matematiker, som då levde i Paris. Att jag, ung nybliven doktor och docent, infördes i en sådan krets, därför bevarar jag i tacksamt minne den svenske fysikern general Fabian Wrede, samt den norske matematikern Ole Jakob Broch, båda tillhörande den då i Paris sammanträdande internationella meterbyrån, vars chef var Broch.

Jag minnes särskilt mitt första sammanträffande med Liouville. Han tog mer än vänligt emot mig med följande yttrande: »Jag känner som en skyldighet att hjärtligt välkomna alla unga matematiker, som kunna vänta en framtid.« »Pensez donc, j'ai

Digitized by Google

vu Abel sans le connaître et j'ai examiné Galois.« Abel hade redan vid sin vistelse i Paris år 1826 nått den aktningsvärda åldern av hela 24 år. Liouville var då endast 17 år och Galois blott 15; 16årig hade han redan publicerat sina första arbeten. En matematikers fantasi vill gärna dröja vid, vad som kunnat inträffa, om Abel kommit i beröring med dessa båda ynglingar, eller gossar, istället för med äldre franska matematiker, över vars kärva likgiltighet han klagar i sina brev.

Liouville räknade alltid som en av de största sorger, som någonsin drabbat honom, att ha träffat Abel, men försuttit tillfället att i honom lära känna den store matematikern, den i hans tanke störste, som någonsin korsat hans väg. Vid mitt besök hade Liouville redan överskridit sitt 64de år, men jag träffade honom sedermera vid förnyade pariserbesök mer än en gång, och samma tanke som vid första sammanträffandet återkom alltjämt. Man får emellertid vid hans uppskattning av samtida matematiker ej glömma, att politiska antipatier och olika sätt att arbeta — han plägade om Cauchy bland annat yttra, att han led av »diarrhé mathématique« — i viss mån fördunklat uppfattningen av hans store samtida och landsman.

Liouville gjorde emellertid vad han som matematiker förmådde för att inför eftervärlden hedra minnet av de båda ynglingar, som tillhört början av hans bana. Ett av de förnämsta av hans egna arbeten ansluter sig direkt till Abel. Han har också, den förste, i sin journal offentliggjort Galois' efterlämnade papper.

Camille Jordan torde dock ha varit den, vilken bäst och fullständigast lyckats återgiva Galois' tankar i det »testament à l'humanité« med vars avfattande han tillbragte hela sin sista natt före den duell, som slutade hans liv. I manuskriptet förekommer litet emellanåt det förtvivlade avbrottet: »Je n'ai pas le temps, je n'ai pas le temps.«

Hermite, vilken redan vid mitt första besök mottagit mig ytterst vänligt, förvånade mig med yttrandet: »Varför har Ni icke rest till Berlin och Weierstrass? Han är utan all jämförelse den främste bland oss alla.« Weierstrass' blotta namn var mig emellertid vid denna tid fullständigt obekant. Jag följde dock så tillvida Hermites anvisning, att jag efter Paris vistades någon tid i Göttingen hos Schering för att genom honom göra en preliminär bekantskap med Weierstrassiska metoder. Det blev

Digitized by Google

härigenom först vintern 1874, våren 1875, som jag kom att tillbringa i Berlin hos Weierstrass. Under vintersemestern 1874—75 hörde jag Weierstrass föreläsningar över »elliptiska funktioner« samt »ganz privat«, endast tre åhörare, en föreläsning över »differentialekvationer«. Under sommarsemestern 1875 åter en föreläsning över »användning av elliptiska funktioner på geometri och mekanik.«

Huru stark spänningen inom akademiska kretsar var emellan Paris och Berlin, därav fick jag under vistelsen i de båda huvudstäderna ett livligt intryck. Så mycket starkare berörde mig därföre den erfarenheten, att såväl Hermite som Weierstrass voro fullständigt främmande för nationalistiska känslor eller böjelser. Båda voro till födseln katoliker, Hermite liksom förut Cauchy varmt troende. Weierstrass intresserad eller kanske rättare road av samtal med högt stående lärda prelater över de hårfina nyanserna vid tolkning av kyrkans lärosatser.

Båda voro helt och främst matematiker och om båda gäller vad Weierstrass vid olika tillfällen framhållit: »Det högsta inom vår vetenskap når endast den, vilken samtidigt är i viss mån poet, har skaldisk siareblick och skönhetskänsla.«

År 1876 tillträdde jag efter L. Lindelöf professionen i matematik vid Helsingfors universitet och övertog år 1880 platsen som förste utnämnde professor vid Stockholms Högskola. Under Helsingforstiden stod jag upprepade gånger i beröring med Rysslands matematiker, speciellt med den främste av dem, Tchebychef. Jag gjorde även under denna tid med liberalt tillmötesgående från Helsingfors universitet en längre resa till Frankrike, Italien, Tyskland, Österrike, alltid med besök och ingående samtal med dess främste matematiker. Min strävan vid denna tid var som alltjämt sedan att söka vinna matematiker från alla länder för personligt sammanträffande att gemensamt diskutera vår vetenskaps främsta problem. Det dröjde doch nära ett fjärdedels sekel efter fransk-tyska krigets avslutande, innan en något så när enhetlig mening kunde vinnas för en sådan plan.

Beträffande plats för sammanträffande segrade, dock ej utan svårighet, Schweiz och Zürich, och år 1897 i januari utsändes slutligen från Zürich till matematiker i olika länder en kallelse att mötas där, vars ingress lyder: »Nachdem auf Grund mannigfacher mündlicher und schriftlicher Korrespondenzen das Projekt (internationale Vereinigung der Mathematiker) eine festere

Digitized by Google

Gestalt anzunehmen begonnen hatte und auch die Ortsfrage wiederholt in Erwägung gezogen worden war, wurde es allgemein als zweckmässig bezeichnet, dass der erste Versuch von einem Lande ausgehen möchte, das durch seine Lage, seine Verhältnisse und durch seine Tradition zur Anbahnung internationaler Beziehungen besonders geeignet sei. So richteten sich denn bald die Blicke nach der Schweiz und insbesondere nach Zürich.« Kongressen inbjöds efter denna inledning till sammanträde i Zürich 8—11 augusti 1897.

Weierstrass hade dött samma år, Hermites hälsa var redan starkt angripen, så att den drivande kraften vid fattandet av detta beslut var framför allt *Geiser*, den energiske och vidsynte ledaren av Polytechnicum i Zürich. Med honom hade förenat sig från Zürich *F. Rudio, Minkowski, A. Hurwitz, I. Franel* samt *F. H. Weber* och från främmande länder

Amerika *Hill*,
England *Greenhill*,
Frankrike *Poincaré*,
Italien *Cremona*,
Ryssland *Markoff*,
Sverige *Mittag-Leffler*,
Tyskland *Klein*,
Österrike-Ungern *Mertens*,

alltså en representativ samling av de matematiker, som ansågos stå i förgrunden bland den tidens.

På begäran av cirkulärets undertecknare hade matematiker från 13 olika länder åtagit sig att sprida det samma, nämligen från:

Amerikas Förenade Stater,
Belgien,
England,
Frankrike,
Grekland,
Holland,
Italien,
Portugal,
Ryssland,
Spanien,
Tyskland,
Sverige med de tre övriga skandinaviska länderna,
Österrike.

Digitized by Google

Den uppfattningen gjorde sig gällande, att samtliga dessa länder komme att tillhöra den matematiska union, som avsågs att bildas i Zürich. Alla hade även med undantag av Grekland, där yttre förhållande stodo i vägen, sänt deltagare till kongressen. Efter långa överläggningar enade man sig slutligen om följande grundstadgar, vilka antogos skola gälla för kommande tider.

Résolutions du congrès international des mathématiciens siégeant à Zürich en 1897.

I. A l'avenir les congrès internationaux des mathématiciens se succèderont à des intervalles de 3 à 5 ans. Il sera tenu compte dans le choix de siège du congrès, des vœux légitimes des différents pays.

II. On choisira, à la fin de chaque congrès, la date et le siège du congrès suivant, ainsi que les organes ou les associations chargés de le préparer et de l'organiser.

III. Si, par suite de circonstances imprévues, un congrès ne pouvait siéger à la date et au lieu choisis, le comité du dernier congrès aurait la faculté de prendre les dispositions nécessaires à la convocation d'un congrès nouveau. A cet effet il s'entendra avec les organes mentionnés à l'article II.

IV. Chaque congrès peut, lorsqu'il le juge utile pour l'étude de certaines questions de nature internationale, nommer des commissions permanentes dont le mandat dura d'un congrès au congrès suivant.

Les compétences et les attributions de ces commissions sont fixées lors de leurs nominations.

V. Le prochain congrès siègera à Paris en 1900. La société mathématique de France est chargée de sa préparation et de son organisation.

Dessutom antogs enhälligt följande allmänna uttalande: »Le congrès a pour but de provoquer des rélations personelles entre les mathématiciens des différents pays.«

Antalet deltagare i denna första och konstituerande matematikerkongress var det ej obetydliga talet 208. Man får ej glömma, att elementär eller vanlig matematik ej var eller komme att bliva representerad.

Skandinaviska deltagare i kongressen voro:

Bendixson, Enestrom, Fredholm, Kobb, v. Koch, Lindelöf, far

Digitized by Google

och son, Mellin, Mittag-Leffler, Tallquist, Zeuthen, Juel, Valentiner, inalles 13.

Beklagligtvis hade ingen av de fyra norska grundläggarna och redaktionsmedlemmarna av Acta mathematica: C. A. Bjerknes, O. J. Broch, Sophus Lie, L. Sylow, av ålders- eller hälsoskäl kunnat deltaga. Att alla fyra helt gillade kongressens grundstadgar, kan jag med brevliga meddelanden med full säkerhet konstatera.

Sammanträdet av »*Deuxième Congrès international des mathématiciens*« ägde enligt beslut, som fattats vid det konstituerande sammanträdet i Zürich, rum i Paris 6—12 augusti 1900, utställningsåret. Organisationen hade i överensstämmelse med § 2 i den internationella unionens grundstadgar anförtrotts åt »Société mathématique de France« under ledning av en internationell byrå med

Hermite som hederspresident,
Henri Poincaré som president,

samt vice presidenter från 10 länder:

Amerika Moore,
Danmark Zeuthen,
England Greenhill,
Finland L. Lindelöf,
Italien Volterra,
Ryssland Tichomandritsky,
Schweiz Geiser,
Sverige-Norge Mittag-Leffler,
Tyskland två representanter Gordan, Lindemann,
Österrike-Ungern Czuber.

Antalet kongressdeltagare hade från 208 i Zürich vuxit till 253 i Paris.

»*Der dritte internationale Mathematikerkongress*«

sammanträdde i Heidelberg 8—13 augusti 1904. Deutsche Mathematiker Vereinigung hade vid kongressen i Paris övertagit uppdraget att sammankalla denna kongress. En organisationskomité av 28 tyska förläggare och högskoleprofessorer hade bildats, men utan internationell byrå, vilket åter varit fallet såväl i Zürich som i Paris. Detta väckte bland närvarande ut-

Digitized by Google

länningar en viss misstämning, enär kongressen härigenom samt även genom sociala anordningar erhöll karaktären av *tysk*, men icke av internationell kongress. Antalet kongressdeltagare från inalles 19 länder utgjorde denna gång 396.

Vid kongressens slutsammanträde föreslog Volterra i namn av »*Soci italiani della Sezione Matematica della R. Accademia dei Lincei, e d'acorde della Presidenza del Circolo Matematico di Palermo*«, att »*Quarto Congresso internationalo dei Matematici*« måtte sammanträda i Roma 6—11 april 1908.

Vid sammanträde av matematiska sektionen av *Accademia dei Lincei* i juni 1906 beslöts, att kongressen skulle stå under ledning av en internationell komité med

P. Blaserna, presidenten för Accademia dei Lincei, i egenskap av President samt *11 vice presidenter* från:

Amerika Newcomb,
Danmark Zeuthen,
England Forsyth,
Frankrike Camille Jordan,
Italien Cerruti, d'Ovidio från Circolo Matematico di Palermo,
Holland Lorentz
Ryssland Vassilieff
Tyskland Gordan, Mertens,
Sverige Mittag-Leffler.

Finland erhöll ej som fallet varit i Zürich och i Paris någon vice-president ej heller *Norge*, vars union med Sverige sedan 1906 blivit upplöst. Antalet deltagare i kongressen var 700, det högsta som vare sig förr eller senare förekommit.

Vid Romkongressens slutsammanträde 11 april framförde Prof. A. R. Forsyth följande inbjudan:

»The Cambridge Philosophical Society invites the International Congress of Mathematicians to hold their 5th Meeting in 1912 in Cambridge.

This invitation is supported by the *London Mathematical Society*«.

Denna inbjudan, understödd av Blaserna, presidenten för romerska kongressen, antogs enhälligt.

The *fifth international Congress of Mathematicians* sammanträdde i Cambridge 22—28 augusti 1912.

Till *Offices* of the Congress hade utsetts:

Digitized by Google

Honorary President: Lord Rayleigh.
President: Sir G. H. Darwin.
Vice-Presidents:
Amerika: E. H. Moore,
Danmark: J. L. W. V. Jensen,
England: P. A. Mac Mahon,
Frankrike: J. Hadamard,
Holland: P. H. Schoute,
Japan: R. Fujisawa,
Italien: V. Volterra,
Ryssland: M. S. Smoluchowsky, V. A. Steklow,
Schweiz: F. Rudio,
Sverige: G. Mittag-Leffler,
Tyskland: W. von Dyck,
Österrike-Ungern: L. Fejér.

Av de 12 vice-presidenterna voro denna gång endast tvenne skandinaver, J. Jensen, Danmark, och Mittag-Leffler, Sverige.

Antalet deltagare var 574 (208 i Zürich, 253 i Paris, 396 i Heidelberg och 700 i Roma).

Vid kongressens slutsammanträde »presented Mittag-Leffler an invitation to the Congress to hold its next meeting at Stockholm.« Man hade från svensk sida önskat 1915, emedan detta år var hundraåret efter *Carl Weierstrass'* födelse och Konung Gustav i anledning härav stiftat ett internationellt matematiskt pris. Beträffande den svenska inbjudningen anfördes i kongressförhandlingarna: Prof. G. Mittag-Leffler presented an invitation to the Congress to hold its next meeting at Stockholm in 1916. The following is the text of the invitation:

Au nom des membres de la I ière classe de l'Académie royale des sciences de Suède, au nom de la rédaction suédoise du journal Acta mathematica ainsi que de tous les géomètres suédois, j'ai l'honneur d'inviter le congrès international des mathématiciens à se réunir à Stockholm en l'année 1916.

Notre auguste souverain le roi Gustave m'a gracieusement confié la charge d'exprimer au congrès qu'il lui souhaiterait avec plaisir la bienvenue dans sa capitale et qu'il serait prêt à le prendre sous son haut patronage pendant son séjour à Stockholm.

Nous autres nous nous estimerions très heureux si le con-

Digitized by Google

grès voulait accepter notre invitation, et nous ferons tout ce qui est en notre pouvoir pour rendre le séjour des membres dans notre pays aussi agréable et aussi instructif que possible.«

Emellertid inbröt världskriget år 1914 och det var således icke att tänka på att sålänge detsamma pågick, och även lång tid efteråt, den 6te internationella matematikerkongressen skulle kunna sammanträda i Stockholm. Man må ej glömma att efter avslutandet av fransk-tyska kriget september 1873, nära ett fjärdedels sekel förflutit, innan det visat sig möjligt, att som skedde i Zürich augusti 1897 under samverkan av matematiker från *båda* de krigförande länderna, jag nämner blott *Henri Poincaré* och *Felix Klein*, stifta samt fastställa för framtiden gällande grundstadgar för *internationella matematikerkongresser*. Väl ha efter kriget kongresser med allsidigt internationellt deltagande i den ena eller andra av de skandinaviska staterna ägt rum, men dessa ha då mer eller mindre avsett att vinna en för deltagarna gemensam nyttighet, vilken endast vid samfällda avtal vore möjlig att ernå.

I överensstämmelse med § 2 i de i Zürich fastställda grundstadgarna vände sig emellertid Prof. *I. E. Fields* i Toronto till mig, i egenskap av den, vilken i Cambridge erhållit uppdraget att organisera den *6te internationella kongressen*, med begäran att jag i överensstämmelse med § 3 i dessa grundstadgar måtte så bedriva, att uppdraget att sammankalla den 6te kongressen från Sverige återgick till England samt härtill söka utverka Konung Gustavs samtycke.

Konungens bifall erhölls, och jag kunde nu meddela professor *Fields*, att från svensk sida intet hinder mötte för kongressens sammanträde i Toronto.

I Toronto sammanträdde också 11.—16. augusti förlidet år (1924) »An international Mathematical Congress«.

Vid densamma förelades för de samlade matematikerna ett »projet de statuts pour une union internationale de mathématiciens«. § 2 i detta projet innehåller den viktiga punkten »L'admission d'un pays à l'union est subordonnée aux conditions fixées par les statuts du *Conseil international de Recherches*.«

Förslaget att »union internationale de mathématiciens« skulle för framtiden vara »subordonnée aux conditions fixées par les statuts du Conseil international de Recherches« synes ha blivit antaget av »The international Mathematical Congress«, enär i

Digitized by Google

redogörelsen för unionens förhandlingar finnes »Resolved that the American section of the International Mathematical Union requests the international Research Council to consider whether the time is ripe for the removal of the restrictions on membership now imposed by the rules of the Council.

The American Section wishes to announce that it intends to present to the National Research Council of the United States resolutions requesting action in this direction.«

Detta beslut gillades enhälligt av delegerade från Holland, Sverige, Danmark, Norge och England i Torontomötet.

De i Zürich, för vad man antog, för framtiden gällande grundstadgarna få väl nu efter mötet i Toronto anses ha upphört att gälla för att ersättas, vem vet för huru länge, av dem som nu i Toronto blivit antagna.

För min personliga del finner jag naturligtvis riktigt och även nödvändigt att en avdelning för matematik ingår i en förening med sådan omfattning som i direktivet för »Conseil international de Recherches.« Funnes matematiken i denna förening icke representerad, hade föreningen berövats den fasta grund för tänkande i rum och tid, vilken endast Matematiken kan skänka.

Mellan den andra internationella matematikerkongressen i Paris hösten 1900 och den tredje i Heidelberg augusti 1904 hade i Kristiania hösten 1902 en annan matematikerkongress efter största mått ägt rum.

Den föll utom cykeln av de i Zürich stiftade internationella kongresserna, men överträffade i storartad anordning alla tidigare eller senare kongresser. Men så firade också Norge genom densamma minnet av sin store son Niels Henrik Abel, den unge student, vars tankar i minst lika hög grad, som de störstes: Gauss, Cauchy, Weierstrass eller Riemann, under det förflutna seklet befruktat vår vetenskap.

Mötet inleddes med Björnstierne Björnsons härliga kantat (musik av Christian Sinding), den mest djuptänkta och förstående hyllning, som skaldekonst någonsin ägnat vår vetenskap.

Urokkelig som tiden
er tallenes viden.
Deres fletninger er
i evigt morgenskjær.

Digitized by Google

renere end sneen,
finere end luften;
men sterkere end verden,
som de vejer uden skaaler
og belyser uden straaler,

och därtill

Der han (Abel) var,
tænkes ikke uden ham[1]).

Tidskriften Acta mathematica bringade Abel sin hyllning genom överlämnandet av tre digra band, inledda genom ett dittills okänt arbete utav Abel samt härefter avhandlingar av ett halvt hundrade författare tillhörande samtidens främsta inom olika nationer. Dessa avhandlingar ha alla det egendomliga, att de äro en direkt fortsättning av något av Abels egna arbeten. Överlämnandet skedde med följande mitt uttalande:

Herr Rektor, mina Herrar Colleger vid Christiania universitet.

Matematiken, vetenskapernas äldste och mest utvecklade, har antecknat många namn, vilka äro märkesstenar på människotankens utvecklingsväg. Sådant är namnet Niels Henrik Abel, kring vilket dagens högtid samlat oss, namnet på ynglingen med barnasinnet, tänkaren, som skrev eviga lagar för talets vetenskap, den lycklige, vilken erfor skapareglädjen, så som endast mänsklighetens störste, och som visste, att tiden icke rubbar hans tankars härskareställning.

Abels blick över vetenskapen var alltomfattande, den var städse riktad mot det högsta, mot idealet självt, så har den störste av hans lärjungar Weierstrass karakteriserat honom. Med denna uppfattning bjuder jag Eder härmed en gåva från 50 matematiker, vilka alla önska att räknas bland Abels lärjungar och alla hoppas att i någon mån ha kunnat bidraga till fortsättningen av hans verk.«

Vid den hyllning studenterna vid Christiania universitet bringade de utländska delegerade vid Abelfesten talade jag å deras vägnar:

»Studenter vid Christiania Universitet.

---

[1]) Bjørnsons original har av utgivaren av »Festskrift ved hundredaarsjubileet for Niels Henrik Abels fødsel«, utan att Björnson därom ägt någon kännedom blivit ändrat från:

»tænkes ikke uden ham«,

till

»kan ikke tænkes uden ham«.

G. M. L.

Digitized by Google

Vårt tack för den hyllning Ni bringat oss delegerade från världens olika lärda sällskap, där matematiken odlas och aktas, har redan framburits av vår äldste, Newcomb. Det har synts, som borde dock ännu ett tack möta Eder, denna gång på Norraena tunga. Christiania studenter, dagen har varit Eder, den na dag och gårdagen, ty vem tillhör Abel närmare än Eder, Abel som aldrig bar någon annan titel än den stolta titeln, den blygsamma, av matematiker och av norsk student. Abel som levde Edert liv, som delade Edra bekymmer och kände Eder glädje, men som tänkte tankar, vilkas form och vilkas innehåll blevo bestämmande för vetandet om talet, den högsta, den strängaste och den svåraste av vetenskaper.

Vackra ord ha sagts till oss delegerade, som hitkommit för att fira Abels minne och man har högt prisat vår vetenskapliga betydelse och vårt vetenskapliga värv. Dock äro vi alla, veten det I Norges studenter, endast de mest blygsamma eftersägare av Eder Abels tankar, på dem vilar vårt livsverk och endast med dem kunna vi hoppas på en plats inom eftervärldens vetenskap. Eder lycka prisar jag, Norges studenter. Många stora män ha en gång varit studenter. Ingen mer än Abel har som student ingått i odödligheten. Intet universitet, intet studentsamfund äger ett sådant minne.

Bliven städse detta minne värdiga, glömmen aldrig de stränga plikter det ålägger, hållen städse idealen i jämnhöjd med dem som voro Niels Henrik Abels, så önskar Eder en matematiker som är Eder och Norges vän.«

Vid återkomsten till Sverige hade jag glädjen att i mitt hem i Djursholm, vilket numera tillhör Kungl. Svenska Vetenskapsakademien, som gäster emottaga den största samling utländska matematiker, som hittills på en gång gästat detsamma:

Sverige: Bendixson, Phragmén, Bäcklund, Dunér, Falk.
Finland: Lindelöf, Donner, Tallqvist.
Danmark: H. G. Zeuthen, T. N. Thiele.
Tyskland: Schwarz, Klein, Hilbert, Hensel, Weber, Pringsheim, Noether, Stäckel, Lampe, Seeck, Engel, L. Kiepert, Fr. Meyer, Gutzmer.
Österrike: M. Lerch, Czuber.
Frankrike: Picard, Darboux, Padé, Pelleton, Sauvage, Le Verrier.
Holland: Cardinaal, Christensen.

Digitized by Google

Belgien: P. Mansion, Le Paige .
England: Forsyth, Baker, Jack, Joly, Hobson, Mac-Mahon, Love, Sampson.
Schweiz: Fehr, Graf.
Italien: Volterra, Pincherle, Peano, Gerbaldi.
Grekland: Stephanos.
U. S. A.: Newcomb, Spanglar, Olsson, Bedell, Canfield, Watson.
Canada: Fields.
Ryssland: Marcelli, M. Zantschewski, Backlund.

Den skandinaviska tanken hade, som det syntes många, genom Svensk-Norska Statens icke deltagande i Danmarks ensamkamp mot det övermäktiga Tyskland, förlorat sin bärande kraft. Att densamma i Sverige fortlevde hos den tidens akademiska ungdom, kan jag emellertid av egen erfarenhet samt med kärt minne av de känslor, som då och efteråt besjälade denna ungdom, bestämt intyga.

För mig stod emellertid klart, att ett återuppbyggande, oberoende av politik eller flyktiga fäststämningar, måste ske inifrån i gemensamt arbete inom den vetenskapliga kulturens högsta områden. Det var denna uppfattning, vilken, när Hermite och Weierstrass framställde förslaget om en internationell matematisk tidskrift utgiven från Sverige, förmådde mig att genast från början söka giva densamma karaktären av skandinavisk.

För mig står likaså oförglömligt, den obetingade anslutning denna plan erhöll i alla fyra länderna.

Från *Sverige* inträdde som medlemmar i den biträdande redaktionen:

A. V. Bäcklund, Lund,
H. Th. Daug, Uppsala,
H. Gyldén, Stockholm,
Hj. Holmgren, Stockholm,
C. J. Malmsten, Uppsala.

Från *Norge:*
C. A. Bjerknes,
O. J. Broch,
S. Lie,
L. Sylow.

Från *Danmark:*
L. Lorenz,

Digitized by Google

J. Petersen,
H. G. Zeuthen.

Från *Finland:*
L. Lindelöf.

Under tidskriftens tillvaro av redan fyra och ett halvt årtionde ha de som avlidit, tid efter annan ersatts av andra. Inalles 18 högt skattade medlemmar av den biträdande redaktionen ha under denna tidsperiod lämnat oss. Anledningen har undantagslöst varit dödsfall. Det sista, som drabbat tidskriften är J. L. W. V. Jensens, den danske matematikern, vars minne oförgätligt tillhör de högsta delarna av vår vetenskap.

Tidskriftens första band pryddes av bilden av *Niels Henrik Abel* och inleddes med *Henri Poincarés* avhandling: »Théorie des groupes fuchsiens«.

Det synes mig, att detta förstlingsband icke utan heder kan sidoställas med *Crelles* första med 5 uppsatser av *Abel.*

Att *Acta mathematica* under första avdelningen av världskriget samt allt framgent, medan avvecklingen ännu pågår, kunnat hävda sin internationella ställning torde vara ett allsidigt erkännande av den nutida matematikens höga ställning inom Skandinaviens fyra folk.

Jag vågar även räkna tidskriften till förtjänst, att det vetenskapliga föreningsbandet inom Skandinavien, ej allenast fortbestod, utan även ytterligare kom att stärkas, när dess tillvaro hotades genom upplösningen av den politiska unionen mellan Sverige och Norge senhösten 1905.

I den internationella matematikerkongressen i Rom, som ägde rum endast tre och ett halvt år efter unionsupplösningen, våren 1908, deltogo ett tiotal matematiker från de fyra skandinaviska länderna. Jag framlade för dem en plan, att Skandinaviens matematiker periodvis med en period av 2 till 3 år borde i tur och ordning samlas i de skandinaviska huvudstäderna. Förslaget vann *odelat* bifall, och jag åtog mig söka så bedriva, att första sammanträdet komme att äga rum i Stockholm redan följande år. Genom Konung Gustavs högsinta inskridande blev detta även möjligt.

En generell inbjudan till matematikerkongressen i Stockholm utsändes av följande lydelse: »Undertecknade tillåta oss härmed inbjuda Eder att inträffa i Stockholm 22.—25. september

Digitized by Google

för att tillsammans med andra svenska, danska, finska och norska matematiker diskutera sådana frågor inom vår vetenskap, som för närvarande äro förnämsta föremål för matematikernas uppmärksamhet.

Stokholm, Uppsala, Lund, Maj 1909.

I. Bendixson, T. Brodén, A. V. Bäcklund, I. Fredholm, E. Holmgren, H. von Koch, G. Mittag-Leffler, E. Phragmén, A. Wiman.

Denna inbjudan hörsammades av 130 matematiker från de fyra länderna. Alla, vilka ej voro bundna av ofrånkomliga skäl, ålder eller sjukdom, hade infunnit sig. Kongressen samlades i den stora fästsalen i Stockholms Högskolas nyuppförda byggnad.

Konung Gustav, som var bunden av vid tiden pågående militärmanövrar, hade ej kunnat personligen närvara, men sände sin telegrafiska hälsning och företräddes av Kronprinsen i egenskap av kongressens Hedersordförande. Regeringen lät sig representera genom *statsministern* samt *undervisningsministern* (ecklesiastikministern). Denna hälsade kongressen välkommen å *Regeringens* namn.

Av inbjudarna hade jag erhållit uppdraget att å deras vägnar hälsa kongressen välkommen. Efter en redogörelse för hur kongressen tillkommit, avslutade jag mitt hälsningstal med orden:

»Tillåt mig til slut, att uttala en önskan. Må vi, det rena tänkandets adepter, lyckas att för alla, som vilja och kunna se, bevisa att samarbete mellan skandinaviens fyra folk, så nära förbundna genom odling och härstamning, icke är enbart en fantasiens dröm, utan är och förbliver en av de hörnstenar, å vilka fädernelandens framtid måste byggas.«

Jag hoppas och vågar tro, att alla 130 kongressdeltagarna instämde i denna önskan samt hemförde intrycket, att vår första skandinaviska matematikerkongress infriat allas bästa förväntningar.

Oslo var i tur redan 1905 att hos sig samla det *skandinaviska Naturforskarmötet.* Detta hade dock, naturligt nog, i följd av de spända politiska förhållanden, som förebådade unionsupplösningen ej gärna under avsevärd tid kunnat äga rum, men skedde år 1916. Det har flerfaldiga gånger i olika pressorgan fremhållits, att efter unionsupplösningen, det *första* återknytan-

Digitized by Google

de av officiella kulturella förbindelser mellan de skandinaviska folken skulle ha ägt rum genom detta naturforskarmöte.

Det synes mig vara en rättighet för oss matematiker, för mig en skyldighet, att en gång för alla bestämt tillbakavisa denne felaktiga uppfattning. Oss matematiker, »det rena tänkandets adepter« tillkommer hedern av denna, jag hoppas och tror ur allas vår synpunkt, patriotiska gärning.

Efter det första matematikermötet i *Stockholm*, sammanträdde det andra i *Köpenhamn* (28.—31. augusti 1911) under *Niels Nielsen* som mötets president, det tredje i Oslo (3.—6. september 1913) med professor *Störmer* som inledare av mötet, det fjärde åter i *Stockholm* (30. augusti—2. september 1916) med *Mittag-Leffler* som inledare, det femte i det nu från Ryssland helt frigjorda Helsingfors (4.—7. juli 1922).

Redogörelser för förhandlingarna vid de båda möteна i Stockholm äro offentliggjorda på franska, i Köpenhamn och Oslo på nationalspråken, i Helsingfors på svenska.

Jag har nyss med några ord berört det 1905 uppskjutna naturforskarmöte, som 1916 ägde rum i Oslo. Detsamma hade, liksom det därpå följande i Göteborg utställningsåret 1923, den egendomligheten, att där saknades en matematisk sektion. Detta ger mig anledning med några ord beröra det näst föregående *skandinaviskt svenska naturforskarmötet.*

Axel Key, den frejdade vetenskapsmannen och läraren, den frisinnade politikern, vars från alla nedärvda eller nyskapade doktriner frigjorda uppfattning gav hans offentliga uttalande en särskild betydelse, var mötets ordförande. Han upptog i sitt inledningstal frågan om allmänna naturforskarmöten eller specialkongresser till begrundande. Den meningen hade då och även tidigare sökt göra sig gällande, att de allmänna mötena förlorat i betydelse och numera borde ersättas av specialkongresser, där de, som arbeta i samma vetenskap, uteslutande ägnade sig åt det vetenskapliga utbytet av egna tankar och erfarenheter. Key var av den mening, att sådana kongresser med rätt täta sammanträffanden borde äga rum. Vi matematiker ha också allt från den första matematikerkongressen i Stockholm 1909 visat oss hylla samma uppfattning. Världskriget förlängde emellertid tidsperioden, i stället för som förut två, högst tre år, med hela 6 år 1916—1922, och vi ha alla att med djup tacksamhet minnas, att det var Finland som först återväckte en tradition,

Digitized by Google

som hotade att försvinna i glömska. Vi se med tacksamhet, att det nu är Danmark som härefter återinträtt i ledet och att vi således kunnat mötas vid det andra skandinaviska matematikermötet i Danmarks huvudstad. Må vi hoppas att cykeln av våra sammanträden hädanefter utan avbrott blir bestående.

Men jag återgår till Keys inledningstal. Key säger sig vara fast övertygad om att det vore att beklaga om specialmöten medförde, att de gemensamma naturforskarmötena sprängdes, och naturforskningens målsmän i Skandinavien därefter ej längre ägde tillfälle att sammanträffa med andra från grannländerna än med specialister, vilka alla arbetat inom samma mer eller mindre begränsade område som de själva. Våra vetenskaper låta sig ej strängt isoleras. Mellan dem finnas stora gränsområden, som endast med svårighet låta sig hänföras till den ena eller andra vetenskapen. På många av dessa gränsområden pågår i våra dagar ett ytterst livligt och fruktbringande samarbete av forskare, som ej gjort ett enda områdes bearbetning till uteslutande specialitet. Dessa ord inneburo året 1898 en djup sanning, en sanning, som i än högre grad blivit förverkligad i närvarande tid.

Vid de sista naturforskarmötena i Oslo och i Göteborg saknades som sagt en matematisk sektion. I Göteborg talade Einstein fantasirikt och vältaligt, men den matematiska kritiken fanns där ej.

I den tid, i vilken vi nu leva, då meddelanden om upptäckter eller nya uppslag bringas oss snart sagt varje dag, är och förbliver matematiskt tänkande den fasta ryggraden vid all forskning inom tidens och rummets gränser. Så dömde man dock ej i Oslo och i Göteborg.

Man kunde å andra sidan finna, att för oss matematiker vore detta likgiltigt. Jag tror det ej. Matematiken, oberörd av tillämpning inom andra vetenskaper kan lätt komma in i någon av formalismens eller filosoferandets skumma avvägar.

Min uppfattning är alltså först och främst, matematiker, »det rena tänkandets adepter«, men sedan med skolad matematisk tanke ett varmt intresse för allt vetande och all kunskap inom tid och rum.

Må det tillåtas mig att med dessa ord avsluta de meddelanden man gjort mig hedern av mig begära.

Digitized by Google

FORTEGNELSE OVER KONGRESSENS MEDLEMMER:

Åkerman, N. G., fil. lic.	Lund
Alsing, Inger, cand. act.	København
Andersen, A. F., Docent	København
Andresen, M., Aktuar	Oslo
Backlund, R. J., fil. dr., Aktuarie	Helsingfors
Bang, A. S., Mag. sc.	København
Barr, K., stud. mag.	København
Beck, V., stud. mag.	København
Bertelsen, N. P., Beregner	København
Birkeland, R., Professor, med Frue	Oslo
Bjerknes, V., Professor	Bergen
Block, H. G., Professor	Göteborg
Bohr, Harald, Professor, med Frue	København
Bohr, Niels, Professor, med Frue	København
Bokkenheuser, P., stud. mag.	København
Bonnesen, T., Professor, med Frue	København
Brodén, T., Professor, med Frue	Lund
Bøggild, J. K., stud. mag.	København
Bøgh, F., Mag. sc., Rektor, med Frue	København
Carleman, T. G. T., Professor	Stockholm
Charlier, C. V. L., Professor	Lund
Cramér, C. H., Docent, med Frue	Mörby
Crone, C., Docent	København
Dahlgren, Th., fil. dr., Aktuarie, med Frue	Malmö
Dalin, H., fil. lic., Lektor	Eslöv
Danielsson, Ó., Dr. phil., Overlærer, med Frue og Datter	Reykjavik
Drachmann. Bj., cand. mag., Direktør, med Frue	København
Edlund, E., fil. kand.	Malmö

PURDUE UNIVERSITY LIBRARY

Digitized by Google

Eibe, Thyra, cand. mag., Lektor	København
Erlang, A. K., cand. mag.	København
Fabricius Bjerre, Fr., stud. mag.	København
Fog, D., cand. mag.	København
Frisch, R., Universitetsstipendiat	Oslo
Gad, O., stud. mag.	København
Gamborg, V. E., Direktør, Folketingsmand	København
Glaven, F., stud. mag.	København
Glindemann-Nielsen, Ingeniør	København
Goldmann, H., Beregner	København
Guldberg, A., Professor, med Frue	Oslo
Gustafsson, T., fil. mag.	Lund
Hagström, K. G., fil. dr., Aktuarie	Stockholm
Hansen, Anders, cand. mag., Direktør	København
Hansen. Carl, Dr. phil., Lektor, med Frue	København
Hansen, H. M., Professor	København
Hansson, A., fil. lic.	Lund
Hartvig, V., Aktuar	Aalborg
Hintikka, E. A., fil. dr., Aktuarie, med Frue	Helsingfors
Hjelmslev, J., Professor, med Frue	København
Iversen, Felix, fil. dr., Universitetsadjunkt	Helsingfors
Iversen, Lars, Dr. phil., Direktør, med Frue	København
Jakobsen, Magda, Mag. sc.	København
Jensen, H., stud. mag.	København
Jensen, V. A. C., cand. mag., Rektor, med Frue	Helsingør
Jessen, A., stud. mag.	København
Johannsen, Fr, Telefondirektør, med Frue	København
Johansson, S., Professor, med Datter	Åbo
Juel, C., Professor	København
Juul, E., stud. mag.	København
Jørgensen, Aage, cand. mag.	København
Jørgensen, L. L., cand. mag., Lektor, med Frue	København
Jørgensen, Povl, Lektor	Aarhus
Knudsen, M., Professor, med Frue	København
Kobbernagel, P. O. T., Dr. phil., Beregner	København
Kofod, A., Formand for Forsikringsraadet	København
Kragh, O., Dr. phil., Folketingsmand, med Frue	København
Kramers, H. A., Dr. phil., Lektor, med Frue	København
Larsson, Ture, fil. kand.	Malmö
Lauritzen, Sv., stud. mag.	København

Digitized by Google

Lehmann, Inge, cand. mag.	København
Lehmann, L., Lektor	København
Lindeberg, J. W., Professor, med Frue	Helsingfors
Lindelöf, E., Professor	Helsingfors
Lublin, M., stud. mag.	København
Lund, Helga, cand. mag., Lektor	Helsingør
Lundgreen, G., stud. mag.	København
Lønborg, P. E. V., cand. polyt., Direktør, med Frue	København
Lønggaard, Marie, Mag. sc., Lektor	Hellerup
Madsen, L. P., Mag. sc., Adjunkt	København
Malmquist, F., fil. lic.	Stockholm
Meyer, Kirstine, Dr. phil., Lektor	København
Mittag-Leffler, G., Professor, ledsaget af Frk. Theorell og Frk. Nordberg	Stockholm
Mollerup, J., Professor, med Frue	København
Myrberg, P. J., Docent	Helsingfors
Møller, I. P., cand. mag.	København
Nagell, Tr., Universitetsstipendiat	Oslo
Nevanlinna, Frithiof, Docent, med Frue	Helsingfors
Nevanlinna, O. W., fil. dr., Överlärare	Helsingfors
Nevanlinna, Rolf, Docent	Helsingfors
Nielsen, Jakob, Professor, med Frue	København
Nielsen-Lyngby, stud. mag.	København
Nilsson, E., fil. mag.	Eslöv
Nybølle, H. Cl., Kontorchef	København
Nyholm, V. W., stud. mag.	København
Næss, A., Docent	Horten
Nørgaard, G., stud. mag.	København
Nørlund, N. E., Professor, med Frue	København
Odhnoff, W., fil. mag.	Stockholm
Ore, Ø., Dr. phil.	Oslo
Pál, J., Dr. phil.	København
Palme, Sv., Direktør	Stockholm
Palmqvist, R., fil. dr., Aktuarie	Stockholm
Pedersen, Ellen, stud. mag.	København
Pedersen, Jens, Dr. polit., Direktør	København
Pedersen, P. O., Professor, Direktør, med Frue	København
Petersen, R., cand. mag., med Frue	København
Philip, E., tekn. Högskolans Sekreterare	Stockholm
Rasch, G., stud. mag.	København

Digitized by Google

Riesz, M., Docent	Stockholm
Rubinstein, P., stud. mag.	København
Schieldrop, E., Docent	Trondhjem
Schou, E., Professor, med Frue	København
Silfwander, Ch., Mag. sc., med Frue	København
Sjögren, I.. fil., lic., Vicedirektør	Stockholm
Skolem, Th., Docent	Oslo
Smith, Anna-Lise, stud. mag.	København
Smith, Kirstine, Dr. phil.	København
Smith, O. A., cand. mag., Lektor	Aarhus
Stadigh, V., fil. dr., Rektor, med Frue	Viborg (Finland)
Steffensen, J. F., Professor, med Frue	København
Stenström, O., Docent	Uppsala
Stridsberg, E., fil. dr., Byråchef	Stockholm
Strömgren, E., Professor, med Frue	København
Störmer, C., Professor, med Frue	Oslo
Tambs-Lyche, R., Docent	Trondhjem
Thalberg, O. M., Lektor	Oslo
Torsting, E., Mag. sc., Adjunkt	København
Tranekjær-Rasmussen, E., stud. mag.	København
Uhler, A., Docent	Lund
Vinding, P., Ingeniør, med Frue	København
Vinter-Hansen, Julie, Mag. sc., Observator	København
Westrup, I. W., Konsul, med Frue	Lund
Wicksell, Sv., Docent, med Frue	Lund
Wiman, A., Professor	Uppsala
Zeilon, N., Docent	Uppsala

Digitized by Google

KONGRESSENS VIDENSKABELIGE FORHANDLINGER

Digitized by Google

Digitized by Google

ATOMIC THEORY AND MECHANICS [1]

BY

N. BOHR

The classical theories.

The analysis of the equilibrium and the motion of bodies not only forms the foundation of physics, but also for mathematical reasoning has furnished a rich field, which has been exceedingly fertile for the development of the methods of pure mathematics. We already notice this connection between mechanics and mathematics at an early period in the works of Archimedes, Galilei and Newton. In their hands the formation of concepts suitable for the analysis of mechanical phenomena was provisionally completed. Since the time of Newton the development of the methods for treating mechanical problems has gone hand in hand with the evolution of mathematical analysis; we need only recall such names as Euler, Lagrange and Laplace. The later development of mechanics too, based on the work of Hamilton, proceeded in very close union with the evolution of mathematical methods, the calculus of variations and the theory of invariants, as appears clearly in recent times also in the papers of Poincaré.

Perhaps the greatest successes of mechanics lie in the domain of astronomy, but also in the mechanical theory of heat has there been found in the course of the last century an interesting application. The kinetic theory of gases, founded by Clausius and Maxwell, interprets the properties of gases to a large extent, as results of the mechanical interactions of atoms and molecules flying about at random. We want to recall especially the explanation of the two principles of thermodynamics given by this

[1] Since the delivery of this address an important paper of Heisenberg has appeared which came to the notice of the writer before the elaboration of the address for publication. The progress which this paper has brought has been of importance for the formulation of the text at various points.

Digitized by Google

theory. The first principle is a direct result of the mechanical law of conservation of energy, while the second principle, the entropy law, can, following Boltzmann, be derived from the statistical behaviour of a large number of mechanical systems. It is of interest here that statistical considerations have permitted the description, not only of the average behaviour of atoms, but also of the fluctuation phenomena, which have led by the investigation of the Brownian motion to the unexpected possibility of counting atoms. The proper tools for the systematic development of statistical mechanics, to which especially Gibbs contributed, were furnished by just the mathematical theory of canonical systems of differential equations.

The development of the electromagnetic theories in the second half of the last century, following the discoveries of Ørsted and Faraday, brought about a profound generalization of mechanical concepts. Although to begin with mechanical models played an essential part in Maxwell's electrodynamics, the advantages were soon realized of conversely deriving the mechanical concepts from the theory of the electromagnetic field. In this theory the conservation laws are explained by considering energy and momentum to be localized in the space surrounding the bodies. In particular a natural explanation of radiation phenomena can be obtained in this way. The theory of the electromagnetic field was the direct cause of the discovery of electromagnetic waves, which to-day play so important a part in electrical engineering. Further the electromagnetic theory of light founded by Maxwell provided a rational basis for the wave theory of light, which goes back to Huygens. With the aid of the atomic theory it afforded a general description of the origin of light and the phenomena taking place during the passage of light through matter. For this purpose the atoms are supposed to be built up of electrical particles which can execute vibrations about positions of equilibrium. The free oscillations of the particles are the cause of the radiation, the composition of which we observe in the atomic spectra of the elements. Further the particles will execute forced vibrations under the forces in the light waves and thus become centers of secondary wavelets which will interfere with the primary waves and produce the well-known phenomena of reflection and refraction of light. When the frequency of vibration of the incident waves ap-

Digitized by Google

proaches the frequency of one of the free oscillations of the atom, there results a resonance effect, by which the particles are thrown into specially strong forced vibrations. In this way a natural account was obtained of the phenomena of resonance radiation and the anomalous dispersion of a substance for light near one of its spectral lines. Just as in the kinetic theory of gases, not merely the average effect of a large number of atoms comes into consideration in the electromagnetic interpretation of optical phenomena. Thus in the scattering of light the random distribution of the atoms makes the effects of the individual atoms appear in such a way that a direct counting of the atoms is possible. In fact, Rayleigh estimated from the intensity of the scattered blue light of the sky the number of atoms in the atmosphere in satisfactory agreement with the counting of atoms obtained by Perrin from a study of the Brownian motion.

The rational mathematical representation of the electromagnetic theory is based on the application of vectoranalysis, or more generally tensoranalysis of higher dimensional manifolds. This analysis founded by Riemann, offered the proper means for the formulation of Einstein's fundamental theory of relativity, which introduces concepts that go beyond Galilei's kinematics, and which may perhaps be considered as the natural completion of the classical theories.

The quantum theory.

In spite of all the successful applications of mechanical and electrodynamical ideas to the atomic theory, the following development revealed profound difficulties. If these theories really provide a general description of thermal agitation and of the radiation connected with motion, then the general laws of heat radiation must be capable of a direct explanation. Contrary to all expectations, however, a calculation on this basis could not explain the empirical laws. Going beyond this, Planck demonstrated, retaining Boltzmann's account of the second law of thermodynamics, that the laws of heat-radiation demand an element of discontinuity in the description of atomic processes quite foreign to the classical theories. Planck discovered that in the statistical behaviour of particles, which execute simple harmonic oscillations about positions of equilibrium, only such states of vibration must be taken into account, the energy of which is an integral multiple of a »quantum«, ωh, where ω is the frequency of the particle and h a universal constant, the

Digitized by Google

so-called Planck's quantum of action. The more precise formulation of the content of the quantum theory appears, however, to be extremely difficult when it is remembered that all the concepts of previous theories rest on pictures which demand the possibility of a continuous variation. This difficulty was especially emphasized by the fundamental researches of Einstein, according to which essential features of the interaction between light and matter suggest that the propagation of light does not take place by spreading waves, but by »light-quanta«, which, concentrated in a small region of space, contain the energy $h\nu$, where ν is the frequency of the light. The formal nature of this statement is evident, because the definition of this frequency rests exclusively on the ideas of the wave theory.

The structural units of the atom.

This inadequacy of the classical theories was brought into the limelight by the development of our knowledge of atomic structure. One formerly hoped that this knowledge might be gradually enlarged by an analysis of the properties of the elements based on the classical theories, which had been fruitful in so many respects. This hope was supported shortly before the birth of the quantum theory by Zeeman's discovery of the effect of magnetic fields on spectral lines. As Lorentz could show, this effect corresponds in many cases to just that action of magnetic fields on the motion of oscillating particles which is to be expected from classical electrodynamics. Besides, this account allowed conclusions to be drawn about the nature of the oscillating particles which agreed beautifully with the experimental discoveries of Lenard and Thomson regarding discharges in rarefied gases. As a result small negatively charged particles, the electrons, were recognized as units common to all atoms. It is true that the so-called »anomalous« Zeeman effect of many spectral lines caused profound difficulties for the classical theory. These were similar to those which showed themselves in the attempts with the aid of electrodynamic models to explain the simple empirical regularities among the spectral frequencies, which were brought to light through the work of Balmer, Rydberg and Ritz. In particular such an account of the spectral laws could hardly be reconciled with the estimate of the number of electrons in the atom which Thomson obtained from observations on the scattering of X-rays by a direct application of the classical theory.

Digitized by Google

These difficulties could for a time be attributed to our imperfect knowledge of the origin of the forces by which the electrons are bound in the atom. The situation was, however, entirely changed by the experimental discoveries in the field of radioactivity, which furnished new means for the investigation of atomic structure. Thus Rutherford obtained convincing support for the idea of the nuclear atom from experiments on the passage through matter of the particles ejected by radioactive substances. According to this idea the greatest part of the atomic mass is localized in a positively charged nucleus, exceedingly small compared with the dimensions of the atom as a whole. Around the nucleus there move a number of light negative electrons. In this way the problem of atomic structure received a great similarity to the problems of celestial mechanics. A closer consideration, however, soon showed that nevertheless there exists a fundamental difference between an atom and a planetary system. The atom must have a stability which presents features quite foreign to mechanical theory. Thus the mechanical laws permit a continuous variation of the possible motions which is entirely at variance with the definiteness of the properties of the elements. The difference between an atom and an electrodynamic model appears also when one considers the composition of the emitted radiation. For in models of the sort considered, where the natural frequencies of motion vary continuously with the energy, the frequency of the radiation will change continuously during emission according to classical theory and will therefore show no similarity to the line spectra of the elements.

Quantum theory of atomic constitution.

The search for a more precise formulation of the concepts of the quantum theory which might be capable of overcoming these difficulties led to the enunciation of the following postulates.

1. An atomic system possesses a certain manifold of states, the »stationary states«, to which corresponds in general a discrete sequence of energy values and which have a peculiar stability. This latter shows itself in that every change in the energy of the atom must be due to a »transition« of the atom from one stationary state to another.

2. The possibility of emission and absorption of radiation by the atom is conditioned by the possibility of energy changes of the atom in such a way that the frequency of the radiation

Digitized by Google

is connected with the energy difference between the initial and final states by the formal relation $h\nu = E_1 - E_2$.

These postulates, which cannot be explained on classical ideas, seem to offer a suitable basis for the general account of the observed physical and chemical properties of the elements. In particular an immediate explanation is given of a fundamental feature of the empirical spectral laws. This feature, the Ritz principle of combination of spectral lines, states that the frequency of every line in a spectrum can be represented as the difference between two terms of a manifold of spectral terms characteristic of the element; in fact, we see that these terms can be identified with the energy values of the stationary states of the atom, divided by h. Besides, this account of the origin of spectra gives an immediate explanation of the fundamental difference between absorption- and emission-spectra. For according to the postulates the condition for selective absorption of a frequency which corresponds to the combination of two terms is that the atom is in the state of smaller energy, while for emission of such radiation it must be in the state of greater energy. In short, the picture described is in very close agreement with the experimental results on the excitation of spectra. This shows itself especially in the discovery of Franck and Hertz about impacts between free electrons and atoms. They found that an energy transfer from the electron to the atom can take place only in amounts which are just the energy differences of the stationary states as computed from the spectral terms. In general the atom is simultaneously excited to emit. Similarly the excited atom can, according to Klein and Rosseland, lose its emissive power through an impact, the colliding electron gaining a corresponding increase of its energy.

Quantum theory of radiation.

As Einstein has shown, the postulates also furnish a suitable basis for a rational treatment of statistical problems, especially for a very lucid derivation of Planck's law of radiation. This theory assumes that an atom, which can undergo a transition between two stationary states and is in the upper state, possesses a certain »probability«, depending only on the atom, of jumping spontaneously to the lower state in a given interval of time. Further it assumes that external illumination with radiation of the frequency corresponding to the transition gives the atom a

Digitized by Google

probability, proportional to the intensity of the radiation, of going from the lower to the upper state. It is also an essential feature of the theory that illumination with this frequency gives the atom in the upper state besides its spontaneous probability an induced probability of jumping down to the lower state. While Einstein's theory of heat radiation gives support to the postulates, it accentuates the formal nature of the frequency condition. For from the conditions for complete thermal equilibrium Einstein draws the conclusion that every absorption- and emission-process is accompanied by a transfer of momentum of amount $h\nu/c$ where c is the velocity of light; just as the idea of light quanta would lead one to expect. The significance of this conclusion has been emphasized in a very interesting way by the discovery of Compton that the scattering of homogeneous X-rays is accompanied by a change of wavelength in the scattered radiation depending on the direction of observation. Such a change in frequency follows in a simple way from the light-quantum theory if in the deflection of the quantum one takes into account the conservation of momentum as well as energy.

The constantly growing contrast between the wave theory of light, apparently required for the explanation of optical phenomena, and the light quantum theory, which represents naturally so many features of the interaction between light and matter, suggested that the failure of classical theories may even affect the validity of the laws of conservation of energy and momentum. These laws, which fill so central a position in the classical theory, would then in the description of atomic processes be only statistically valid. However, this suggestion does not offer a satisfactory escape from the dilemma, as is evident from experiments on scattering of X-rays, which recently have been undertaken with the beautiful methods permitting a direct observation of individual processes. For Geiger and Bothe have been able to show that the recoil- and photo-electrons, which accompany the production and absorption of the scattered radiation, are coupled in pairs just as one would expect from the picture of the light quantum theory. With the method of the Wilson cloud chamber Compton and Simon have even succeeded in demonstrating, besides this pairing, the connection demanded by the light quantum theory between the direction in which the

Digitized by Google

effect of the scattered radiation is observed and the direction of the velocity of the recoil electrons accompanying the scattering. From these results it seems to follow that in the general problem of the quantum theory one is faced not with a modification of the mechanical and electrodynamical theories describable in terms of the usual physical concepts, but with an essential failure of the pictures in space and time on which the description of natural phenomena has hitherto been based. This failure appears also in a closer consideration of impact phenomena. In particular for impacts in which the time of collision is short compared to the natural periods of the atom and for which very simple results are to be expected according to the usual mechanical ideas, the postulate of stationary states would seem to be irreconcilable with any description of the collision in space and time based on the accepted ideas of atomic structure[2]).

The correspondence principle.

Nevertheless it has been possible to construct mechanical pictures of the stationary states which rest on the concept of the nuclear atom and which have been essential in interpreting the specific properties of the elements. In the simplest case of an atom with only one electron, such as the neutral hydrogen atom, the orbit of the electron would be on classical mechanics a closed ellipse, obeying Kepler's laws, according to which the major axis and frequency of revolution are connected in a simple way with the work necessary for a complete separation of the atomic particles. Now if we regard the spectral terms of the hydrogen spectrum as determining this work, we see in that spectrum evidence of the steplike process by which the electron under emission of radiation is gradually bound more and more firmly in states visualized as orbits of smaller and smaller dimensions. When the electron is bound as firmly as possible, and the atom can therefore emit no further radiation, the normal state of the atom has been reached. The orbital dimensions estimated from the spectral terms have values for this state of the same order of magnitude as the atomic dimensions obtained from the mechanical properties of the elements. From the nature of the postulates, however, such features of the mechanical pictures as frequency of revolution and shape

[2]) For a closer discussion of these problems reference may be made to a recent article of the writer (Zs. für Phys. *34*, 142, 1925; compare in particular the addendum).

Digitized by Google

of the electronic orbits are not open to comparison with observations. The symbolic character of these pictures can hardly be more strongly emphasized than by the fact that in the normal state no radiation is emitted, although according to the mechanical picture the electron is still moving. Nevertheless the visualization of the stationary states by mechanical pictures has brought to light a far reaching analogy between the quantum theory and the mechanical theory. This analogy was traced by investigating the conditions in the initial stages of the binding process described, where the motions corresponding to successive stationary states differ comparatively little from each other. Here it was possible to demonstrate an asymptotic agreement between spectrum and motion. This agreement establishes a quantitative relation by which the constant appearing in Balmer's formula for the hydrogen spectrum is expressed in terms of Planck's constant and the values of the charge and mass of the electron. The essential validity of this relation was clearly illustrated by the subsequent test of the predictions of the theory regarding the depedence of the spectrum on the nuclear charge. The latter result may be considered as the first step towards the fulfilment of the program presented by the concept of the nuclear atom, to account for the relationships between the properties of the elements solely by means of the integer which represents the number of unit charges on the nucleus, the so-called »atomic number«.

The demonstration of the asymptotic agreement between spectrum and motion gave rise to the formulation of the »correspondence principle«, according to which the possibility of every transition process connected with emission of radiation is conditioned by the presence of a corresponding harmonic component in the motion of the atom. Not only do the frequencies of the corresponding harmonic components agree asymptotically with the values obtained from the frequency condition in the limit where the energies of the stationary states converge, but the amplitudes also of the mechanical oscillatory components give in this limit an asymptotic measure for the probabilities of the transition processes on which the intensities of the observable spectral lines depend. The correspondence principle expresses the tendency to utilize in the systematic development of the quantum theory every feature of the classical theories in a ratio-

Digitized by Google

nal transcription appropriate to the fundamental contrast between the postulates and the classical theories.

The rules of quantization.

The development was considerably furthered by the fact that it seemed possible to formulate certain general laws, the so-called »rules of quantization«, by means of which the mechanical motions associated with the stationary states were to be chosen from the continuous manifold of such motions. These rules concern atomic systems for which the solution of the mechanical equations of motion is simply- or multiply-periodic. In these cases the motion of every particle can be represented as a superposition of discrete harmonic vibrations. According to the rules of quantization which were considered to be a rational generalization of Planck's original result for the possible energy values of an harmonic oscillator, certain components of action which characterized the solution of the mechanical equations of motion are put equal to integral multiples of Planck's constant. By means of these rules a classification of the stationary states results in which a set of integers, the »quantum indices«, is ascribed to every state. Their number is equal to the degree of periodicity of the mechanical motion. In formulating the rules of quantization the modern development of the mathematical methods of dealing with mechanical problems was of decisive importance. We recall only the theory of phase integrals utilized in particular by Sommerfeld, as well as the property of adiabatic invariance of these integrals emphasized by Ehrenfest. The theory found a very elegant form through the introduction of the uniformizing variables of Stäckel. In this form the fundamental frequencies determining the periodicity properties of the mechanical solution appear as the partial derivatives of the energy with respect to the components of action to be quantized. The asymptotic connection between the motion and the spectrum as calculated from the frequency condition is secured in this way.

With the help of the rules of quantization many finer details of the spectra seemed to be accounted for naturally. Of especial interest was Sommerfeld's demonstration that the small deviations from a Keplerian motion, which result from the modification of Newtonian mechanics demanded by the relativity theory, offer an explanation of the fine structure of the hydrogen lines. Furthermore we wish to recall here the explanation given by Epstein and Schwarzschild of the splitting up of the hydrogen

Digitized by Google

lines in an external electric field which Stark discovered. We are here dealing with a mechanical problem, the treatment of which was constantly improved at the hands of mathematicians like Euler and Legendre, until Jacobi stated his famous elegant solution by means of Hamilton's partial differential equation. Especially after the utilization of the correspondence principle — by which not only the polarization of the Stark effect components was interpreted, but also, as Kramers showed, the peculiar intensity distribution of these components — can we say that in this effect every trait of Jacobi's solution can be recognized, although hidden under a quantum theory mask. In this connection it is of interest to mention that with the help of the correspondence principle the effect of a magnetic field on the hydrogen atom could be treated so as to show a far-reaching similarity with Lorentz's account of the Zeeman effect on the basis of classical electrodynamics, especially in the form given by Larmor.

Stability of atomic structure.

While the last mentioned problems represent direct applications of the rules of quantization, we meet in the problem of the structure of atoms with several electrons a case where the general solution of the mechanical problem does not possess the periodic properties which seem to be necessary for the mechanical picturing of the stationary states. It suggested itself, however, that this further limitation of the applicability of mechanical pictures in the study of the properties of atoms with several electrons, beyond that in the study of atoms containing only one electron, is directly connected with the postulate of the stability of stationary states. In fact the interaction of the electrons in the atom presents a problem which is quite analogous to the problem of a collision between an atom and a free electron. Just as no mechanical explanation can be given for the stability of an atom in the collision, so we must suppose that already in the description of the stationary states of the atom the special part which every electron plays in its interaction with the other electrons is secured in an entirely unmechanical way.

This view is in general conformily with the spectroscopic evidence. An important feature of this evidence is the discovery of Rydberg that, in spite of the more complicated structure of the spectra of other elements compared to that of hydrogen, the same constant as that in the Balmer formula appears in the empirical formulae of the series spectra of all elements. This

Digitized by Google

discovery is simply explained by regarding the series spectra as evidence of processes by which an electron is added to an atom, its binding becoming more firm step by step under emission of radiation. While the character of the binding of the other electrons remains unchanged, the steplike strengthening of the binding of this electron is depicted by orbits which at first are large compared with usual atomic dimensions and which become smaller and smaller until the normal state of the atom is reached. In the case when the atom has a single positive charge before the capture of the electron the attraction of the electron by the rest of the atom will, on this picture of the binding process, at first coincide closely with the attraction of the particles in the hydrogen atom. It is therefore clear why the spectral terms representing the binding of the electrons show an asymptotic convergence to the terms of the hydrogen spectrum. In the same way one obtains a direct explanation of the general dependence of a series spectrum on the state of ionization of the atom, brought to light so beautifully through the work of Fowler and Paschen. Typical evidence of the way in which the electrons are bound in the atoms is also afforded by the study of the X-ray spectra. On the one hand, the fundamental discovery of Moseley of the striking similarity of the X-ray spectrum of an element to the spectrum that corresponds to the binding of a single electron by the nucleus can be directly understood if it is remembered that in the interior of the atom the influence of the nucleus on the nature of the binding of each individual electron exceeds by far the mutual influence of the electrons. On the other hand the X-ray spectra show certain characteristic differences from the series spectra. These originate from the circumstance that in the former we do not witness the binding of an additional electron in the atom, but the reorganization of the binding of the remaining electrons upon removal of one of the electrons previously bound. This circumstance, which has been especially emphasized by Kossel, was suitable for bringing to light new important features of the stability of atomic structure.

The analysis of spectra.

In order to account for the details of the spectra a closer study of the interplay of the electrons in the atom is required. Disregarding a strict application of mechanics, an attack was made on this problem by assigning to every electron a motion of such periodic properties that a classification of the spectral terms by

Digitized by Google

means of quantum indices could be accomplished. In the hands of Sommerfeld in particular a number of regularities of the spectra were simply explained in this way. Further these considerations afforded a fruitful field of application for the correspondence principle. In fact, this gave an account of the peculiar restrictions in the possibilities of combining spectral terms, the so-called »selection rules« for spectral lines. Recently it has been also possible by making use of the evidence from series spectra as well as from X-ray spectra to draw conclusions about the grouping of electrons in the normal state of the atom. This grouping explained the general features of the periodic system of the elements in conformity with the ideas of chemical activity of atoms as developed especially by J. J. Thomson, Kossel and G. N. Lewis. The progress in this field has been intimately connected with the large enrichment during the last few years of spectroscopic evidence. Through the investigations not least of Lyman and Millikan the gap has been almost bridged over between the optical spectra and the region of X-rays. In this region great advances have been made in recent years by Siegbahn and his collaborators; especially may here be mentioned the work of Coster on the X-ray spectra of heavy elements by which such beautiful support was obtained for the account of essential features of the periodic system.

The analysis of the finer details of the spectra, however, has brought a number of features to light, which could not be interpreted with mechanical pictures on the basis of the theory of periodicity systems. We think here in particular of the multiplet structure of spectral lines and the effect of magnetic fields on these structures. These latter phenomena, which are generally known as anomalous Zeeman effects and which, as mentioned above had already led to difficulties in the classical theories, fitted, it is true, in a natural way into the scheme of the fundamental postulates of the quantum theory. For, as Landé showed, the frequencies of the components into which each spectral line is split up by the field can, just as the original lines, be represented as combinations of terms. The manifold of these »magnetic terms« is obtained by replacing each original spectral term by a set of values which differ from it by small quantities depending on the field intensity. Here the beautiful experiments of Stern and Gerlach, by which a direct connection was established bet-

Digitized by Google

ween the force which acts on an atom in an inhomogeneous magnetic field and the energy values of the stationary states in the field calculated from the magnetic terms may be regarded as a most direct support of the fundamental ideas of the quantum theory. Landé's analysis discloses, however, a strange difference between the interactions of the electrons in the atom and the coupling of mechanical systems. In fact we are forced to assume the presence of a mechanically undescribable »strain« in the interaction of the electrons which prevents a unique assignment of quantum indices on the basis of mechanical pictures[3]). In the discussion of this problem a general condition of thermodynamic stability introduced by Ehrenfest played an important part. When applied to the postulates of the quantum theory, this condition states that the statistical weight attributed to a stationary state is a quantity which cannot be changed by a continuous transformation of the atomic system. Moreover, it has recently been recognized that this same condition leads even for atoms with only one electron to difficulties which point to a limitation of the validity of the theory of periodicity systems. In fact the problem of the motion of point charges admits of certain singular solutions which must be excluded from the manifold of stationary states. This exclusion artificially restricts the rules of quantization, but at first this restriction did not obviously contradict experimental evidence. Difficulties of an especially grave nature, however, were brought to light by the interesting analysis by Klein[4]) and Lenz[5]) of the problem of a hydrogen atom in crossed electric and magnetic fields. Here it was found impossible to satisfy Ehrenfest's condition since suitable variation of the external forces would gradually transform orbits depicting stationary states, which could not always be excluded from the manifold of these states, into orbits where the electron falls into the nucleus.

Apart from these difficulties, the analysis of the finer details of the spectra has considerably furthered the quantum theory

---

[3]) Compare an article of the writer (Ann. d. Phys. *71*, 228, 1923) which contains a general survey of the results regarding the explanation of spectral evidence on the basis of mechanical pictures of stationary states. In this article detailed reference to the earlier literature on the subject may be found, and we therefore have confined ourselves here to quote papers which have appeared since then.

[4]) O. Klein, Zs. für Phys., 22, 109, 1924.

[5]) W. Lenz, Zs. für Phys., 24, 197, 1924.

Digitized by Google

interpretation of the laws of the relationship between the elements. In fact, an extension of the ideas regarding the grouping of the electrons to which the quantum theory has led, has recently been suggested by Dauvillier[6]), Main Smith[7]) and Stoner[8]), taking various kinds of evidence into consideration. Notwithstanding the formal nature of these suggestions, they exhibit a close connection with the spectral regularities disclosed by Landé's analysis. In this line important progress has recently been made especially by Pauli[9]). Notwithstanding that the results thus obtained constitute an important step towards the above mentioned program of accounting for the properties of the elements solely on the basis of the atomic number, it must be remembered, however, that the results do not allow of an association with a unique mechanical picture.

Quantum theory of optical phenomena.

A new era in the development of the quantum theory has been opened up during the last few years by a closer study of optical phenomena. While, as mentioned above, the classical theory had such great successes in this field, the postulates at first gave no direct clue. From experiment, it is true, one could conclude that an atom, when illuminated, caused a scattering of the light essentially analogous to the classically computed scattering of elastically bound electrical particles, whose natural frequencies are the same as the frequencies corresponding to the transition processes which the atom can perform under the influence of external radiation. In fact, on the classical theory such harmonic oscillators would, when excited, emit a radiation of just the same constitution as that of atoms transferred to a higher stationary state. The possibility of obtaining a unified description of optical phenomena with this concept of oscillators conjugated to the transitions, was essentially advanced by an idea of Slater[10]), according to which the emission of radiation from an activated atom may be regarded as »cause« for the spontaneous transition, in analogy to the effect of incident radiation in

[6]) A. Dauvillier, C. R., *177*, 476, 1924.

[7]) J. D. Main Smith, Journ. Chem. Ind., *44*, 944, 1925.

[8]) E. C. Stoner, Phil. Mag., *4* , 719, 1924.

[9]) W. Pauli Jr., Zs. für Phys. *31*, 765, 1925. Compare also H. N. Russell and F. A. Saunders, Astrophys. Journ. *61*, 38, 1925; S. Goudsmit, Zs. für Phys. *32*, 794, 1925; W. Heisenberg, Zs. für Phys. *32*, 841, 1925; F. Hund, Zs. für Phys. *33*, 345; *34*, 296, 1925.

[10]) J. C. Slater, Nature, *113*, 307, 1924; see also N. Bohr, H. A. Kramers and J. C. Slater, Phil. Mag. *47*, 785, 1924.

Digitized by Google

producing transitions. Ladenburg made a first important step towards a quantitative description of dispersion by suggesting a definite connection between the scattering activity of the oscillators and the probabilities of the corresponding transitions in Einstein's theory. Decisive progress, however, was made by Kramers[11]) by an ingenious transcription, in harmony with the correspondence principle, of the effects which according to classical theory are brought about in an electrodynamical system by illumination with light waves. Just as the radiation frequencies are calculated in the classical theory on the one hand and in the quantum theory on the other hand, it is typical in this transcription, that differential quotients are replaced by differences, in such a way that in the final formulae only quantities open to direct observation appear. Thus in Kramers' theory the scattering of an atom in a certain stationary state is quantitatively connected with the frequencies corresponding to the different transition processes to other stationary states as well as with the probabilities of the appearance of these transitions under the influence of illumination. It is an essential feature of the theory that in calculating the anomalous dispersion near a spectral line one has to take into account two opposite kinds of resonance effects depending on whether the spectral line corresponds to a transition of the atom to a state of larger or smaller energy. Only the first of these corresponds with the resonance effects which have been utilized previously for the account of dispersion on the basis of the classical theory. It is also very interesting that the further development of the theory by Kramers and Heisenberg[12]) gave a natural quantitative description of additional scattering effects with changed frequencies, whose existence had been predicted by Smekal[13]) from considerations based on the theory of light quanta, which thereby again has shown its fertility.

While this description of optical phenomena was entirely in harmony with the fundamental ideas of the quantum theory, it soon appeared that it stood in strange contradiction to the use of mechanical pictures previously employed for an analysis of the stationary states. In the first place, it is impossible on the basis of the scattering activity of illuminated atoms demanded

---

[11]) H. A. Kramers, Nature, *113*, 673; *114*, 310, 1924.

[12]) H. A. Kramers and W. Heisenberg, Zs. für Phys. *31*, 681, 1925.

[13]) A. Smekal, Naturw. *11*, 873, 1923.

Digitized by Google

by the dispersion theory to construct an asymptotic connection between the reaction of an atom in alternating fields of smaller and smaller frequency and the reaction in constant fields as calculated from quantization rules of the theory of periodicity systems. This difficulty strengthened the doubts about this theory to which, as already mentioned, the problem of the hydrogen atom in crossed electric and magnetic fields had led. Secondly it had to be regarded as especially unsatisfactory that the theory of periodicity systems was apparently helpless in the problem of the quantitative determination of the transition probabilities on the basis of the mechanical pictures of stationary states. This was felt all the more, as it was possible in several cases to obtain a quantitative formulation of the general statements of the correspondence principle as regards these transition probabilities with the help of viewpoints suggested by an analysis of the optical behaviour of electrodynamic models[14]). These results stood in excellent agreement with measurements on the relative intensities of spectral lines, as they have been developed especially in Utrecht during the last few years, but they could only in a very artificial way be included in the schemes governed by the rules of quantization.

Attempt of a rational quantum mechanics.

Quite recently Heisenberg[15]), who has especially emphasized the above difficulties, has taken a step presumably of fundamental importance by formulating the problems of the quantum theory in a novel way by which the difficulties attached to the use of mechanical pictures may, it is hoped, be avoided. In this theory the attempt is made to transcribe every use of mechanical concepts in a way suited to the nature of the quantum theory and such that in every stage of the computation only directly observable quantities enter. In contrast to ordinary mechanics the new »quantum mechanics« does not deal with a space-time descrip-

---

[14]) H. C. Burger and H. B. Dorgelo, Zs. für Phys. *23*, 258, 1924.
L. S. Ornstein and H. C. Burger, Zs. für Phys *24*, 41; *28*, 135; *29*, 241, 1924.
W. Heisenberg, Zs. für Phys. *31*, 617, 1925.
S. Goudsmit and R. de L. Kronig, Naturw. *13*, 90, 1925.
H. Hönl, Zs. für Phys. *31*, 885; *33*, 261, 1925.
R. de L. Kronig, Zs. für Phys. *31*, 885; *33*, 261, 1925.
A. Sommerfeld and H. Hönl, Ber. Berlin Acad. 141, 1925.
H. N. Russell, Nature, *115*, 835, 1925.

[15]) W. Heisenberg, Zs. für Phys. *33*, 879, 1925.

Digitized by Google

tion of the motion of atomic particles. It operates with manifolds of quantities which replace the harmonic oscillating components of the motion and symbolize the possibilities of transitions between stationary states in conformity with the correspondence principle. These quantities satisfy certain relations which take the place of the mechanical equations of motion and the quantization rules. That such a procedure actually leads to a self-contained theory sufficiently analogous to classical mechanics depends essentially on the fact that, as Born and Jordan[16]) were able to show, there exists in Heisenberg's quantum mechanics a conservation theorem analogous to the energy law of the classical theory. The theory is built up in such a way that it is automatically in harmony with the postulates of the quantum theory. In particular the frequency condition is automatically fufilled by the values for the energies and frequencies derived from the quantum mechanical equations of motion. Although the fundamental relations which take the place of the quantization rules involve Planck's constant, quantum indices do not appear explicitly in these equations. The classification of stationary states is based solely on a consideration of the transition possibilities, which allow step by step to build up the manifold of these states. Summarizing, the whole apparatus of the quantum mechanics can be regarded as a precise formulation of the tendencies embodied in the correspondence principle. It must here be mentioned that the theory fulfills the requirements of Kramers' dispersion theory.

Due to the great difficulties of the mathematical problem involved it has not yet been possible to apply Heisenberg's theory to the open questions of atomic structure. From the above brief description it will be understood, however, that a number of results which, like the expression for Rydberg's constant, had formerly been obtained on the basis of mechanical pictures by the aid of the correspondence principle, will retain their validity[17]).

[16]) M. Born and P. Jordan, Zs. für Phys., to appear shortly. The writer is obliged to the authors for the opportunity of seeing their papers in proof.

[17]) *Note added in proof.* Dr. Pauli has very kindly informed me of his success in making the new theory account quantitatively for the Balmer formula for the hydrogen spectrum as well as the influence on this spectrum of electric and magnetic fields. This is a very important result since Pauli's analysis shows how the new theory avoids the difficulty involved in the older account of the spectral evidence in the necessary exclusion of the stationary states corresponding to singular solutions of the electronic motion.

Digitized by Google

Moreover it is of the greatest interest that already in the simple cases for which up to now a treatment on the basis of Heisenberg's theory has been carried through the new theory leads, besides to a quantitative calculation of the transition probabilities, to energy values for the stationary states, which differ systematically from those obtained by the quantization rules of the older theory. One may therefore hope that Heisenberg's theory will be helpful in the struggle with the puzzling difficulties, mentioned above, in the study of the finer details of the spectra.

Earlier in this paper mention was made of the fundamental difficulties which encompass the construction of pictures of the interaction between atoms either by means of radiation or by collisions. These difficulties seem to require just this abandoning of mechanical models in space and time which is so characteristic a feature in the new quantum mechanics. As yet, however, the formulation of this mechanics takes no account of the coupling of transition processes in pairs which shows itself in those interactions. In fact, only those quantities which depend on the existence of the stationary states and the possibilities of transitions between them occur in the new theory which definitely avoids any mention of the times at which transitions take place. This restriction, however, which is typical of the attack on the problem of the constitution of the atom which is based on the postulates of the quantum theory, allows only some aspects of the analogy between the quantum theory and the classical theories to come to light. These aspects belong principally to the radiative properties of atoms, and just here Heisenberg's theory represents a real advance. In particular it allows us in the phenomena of scattering to recognise the presence of electrons bound in atoms in a way completely analogous to the classical theories, which, as stated above, in the hands of J. J. Thomson allowed to count the number of electrons in an atom from measurements of scattering of X-rays. The problems arising out of the validity of the conservation laws in atomic interactions involve, however, quite other aspects of the correspondence of the quantum theory with the classical theory. These are equally essential in the general formulation of the quantum theory and it is impossible to avoid discussing them when the reaction of atoms to swiftly moving particles is more closely studied. It is just here indeed that the classical theories have contributed so fundamentally to our knowledge of atomic structure.

Digitized by Google

It will interest mathematical circles that the mathematical instruments created by the higher algebra play an essential part in the rational formulation of the new quantum mechanics. Thus the general proofs of the conservation theorems in Heisenberg's theory carried through by Born and Jordan are based on the use of the theory of matrices going back to Cayley and developed especially by Hermite. It is to be expected that a new era of the mutual fertilization of mechanics and mathematics mentioned in the beginning of this essay has commenced. To the physicists it will at first seem deplorable that in atomic problems we have apparently met with such a limitation of our usual means of visualization. This regret will, however, have to give place to thankfulness that mathematics, in this field too, presents us with the tools to prepare the way for further progress.

Digitized by Google

FYSISK HYDRODYNAMIK

AF

V. BJERKNES

I den hydrodynamiske literatur pleier man gjennemgaaende at forutsætte, at tætheden er en funktion kun av trykket, $\varrho = f(p)$. Denne betingelse begrænser den »klassiske« hydrodynamik, hvor lovene om hvirvlers bevarelse gjælder, termodynamiske cirkelprocesser er udelukket, og dermed samspillet med fysiske og kemiske fænomener av mere almindelig natur avskaaret. Forutsætter man derimot almindeligere $\varrho = f(p, \vartheta \ldots)$, ϑ temperaturen og de antydede led parametre som definerer den kemiske sammensætning, saa har man de almindeligere forhold, hvor hvirvler dannes og tilintetgjøres, og forøvrig fuld berøring med den hele fysik og kemi kan opnaaes. Denne almindeligere »fysiske« hydrodynamiks problemer er i reglen for komplicerte til at kunne løses ved integration. Men det hindrer ikke, at man kan diskutere de vædskebevægelser, som vil indtræde under disse almindeligst mulige forhold, vise disse vædskefelters analogi med elektriske eller magnetiske felter, lægge grund for forstaaelse av luft- og havbevægelserne eller til og med ta op til diskussion indre bevægelser paa solen, for om mulig at naa frem til en forstaaelse av solflekkerne og deres eiendommeligheter.

Foredraget var en kort sammenfatning av en række forelæsninger, som professoren hadde holdt høsten 1924 ved California Institute of Technology, Pasadena, California. De vil utkomme i tryk, men det er endnu ikke sikkert avgjort hvor.

Digitized by Google

Digitized by Google

ÜBER DEN KLASSENKÖRPER EINES ABEL'SCHEN ZAHLKÖRPERS

VON

A. WIMAN

1. Betreffend den Zusammenhang zwischen den Diskriminanten D des Oberkörpers K und d des Unterkörpers k gilt bekanntlich [1]) die Relation

$$(1)\quad D = d^r n(D_k),$$

wobei r den Relativgrad und $n(D_k)$ die Norm der Relativdiskriminante D_k bezeichnen. Findet man jetzt auf irgend eine Weise $n(D_k) = 1$, so heisst der Oberkörper K unverzweigt und stellt einen Klassenkörper in Bezug auf k dar. Die hier mitzuteilenden Resultate habe ich zuerst auf einem indirekten Wege gefunden, indem aus den Berechnungen des Herrn *Värmon* in seiner Inauguraldissertation [2]) sich unmittelbar die Relation $D = d^r$ herleiten liess. In den folgenden Entwicklungen wird aber der Nachweis für $n(D_k) = 1$ direkt geführt.

Zunächst behandeln wir einen einfachen speziellen Fall. Es bezeichne M die Diskriminante eines quadratischen Zahlkörpers. M bedeutet dann eine positive oder negative ganze Zahl, welche lauter verschiedene ungerade Primzahlen als Faktoren enthält und überdies noch durch 4 oder 8 teilbar sein kann. Ist M eine ungerade Zahl, so hat man $M \equiv 1 \pmod 4$. Hat M die Gestalt $4M'$, wo M' ungerade ist, so muss $M' \equiv -1 \pmod 4$. Ist endlich M durch 8 teilbar, so kann auch $-M$ eine Diskriminante sein. Enthält M mehrere, etwa r, Primzahlen, so bekommt man eine Zerlegung $M = M_1 M_2$, wo M_1 und M_2 ebenfalls Diskriminanten sind, und die r Primzahlen in einer beliebig

---

[1]) *Hilbert*: Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, p. 206 (1897).

[2]) Über Abel'sche Körper, deren alle Gruppeninvarianten aus einer Primzahl l bestehen, und über Abel'sche Körper als Kreiskörper (Lund 1925).

Digitized by Google

vorgegebenen Weise auf M_1 und M_2 verteilt sind. Sei nun $k = R(\sqrt{M})$ und der Oberkörper $K = R(\sqrt{M}, \sqrt{M_1})$. Als Relativkörper wird dann K durch die Zahl $\sqrt{M_1}$ bestimmt. Offenbar kann $n(D_k)$ keine Idealfaktoren enthalten, welche nicht der Diskriminante des Körpers $R(\sqrt{M_1})$ im absoluten Rationalitätsbereiche angehören. Nun wird aber derselbe Relativkörper durch die Zahl $\sqrt{M_2}$ bestimmt, so dass D_k keine Primideale enthalten kann, welche nicht sowohl in M_1 als M_2 aufgehen. Da diese in Bezug auf einander relative Primzahlen sind, so muss demnach $n(D_k) = 1$, d. h. K in Bezug auf k ein unverzweigter Körper oder Klassenkörper sein.

In dieser Weise ergibt sich, dass für jede ungerade Primzahl p_l, durch welche M teilbar ist, der Klassenkörper von $R(\sqrt{M})$ den Körper $R(\sqrt{\pm p_l})$ als Unterkörper enthält, wobei $\pm p_l \equiv 1 \pmod 4$. Dazu kommt noch der Körper $R(\sqrt{-1})$, falls M durch 4 teilbar ist, bez., falls M den Teiler 8 enthält, einer von den Körpern $R(\sqrt{2})$ oder $R(\sqrt{-2})$. Der Relativgrad des aus diesen Körpern zusammengesetzten Klassenkörpers in Bezug auf $R(\sqrt{M})$ erweist sich als 2^{r-1}, also gleich der Anzahl der Idealgeschlechter des letzteren Körpers. Die Geschlechtscharaktere sind ja auch bekanntlich quadratische Restcharaktere der genannten Zahlen $\pm p_l$, -1, bez. 2 oder -2. Es lässt sich jetzt unmittelbar erschliessen, dass *in dem durch die obigen Quadratwurzeln erweiterten Rationalitätsbereich die Klassengleichung in Faktoren nach den Geschlechtern zerfällt* [1]).

Hiermit haben wir auch die quadratischen unverzweigten Körper in Bezug auf einen Grundkörper $R(\sqrt{M})$ *bei einem absoluten Rationalitätsbereiche* gefunden. Dieselben lassen sich schon durch Ziehung von Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen herstellen. In seiner Behandlung dieses Problems sucht Herr *Sommer* [2]) die Lösung durch Quadratwurzeln aus sog. singulären Primärzahlen im Grundkörper. Diese Quadratwurzeln sollen also durch Wurzelziehen aus rationalen Grössen sich ausdrücken lassen. Dies findet man auch in den dort angeführten Beispielen, welche nicht in dieser Gestalt gegeben sind, bestätigt. So

---

[1]) Man vergleiche *Weber*, Algebra III, p. 513 (1908), wo sich dieses Resultat im Falle einer negativen Diskriminante M findet.

[2]) Im letzten Abschnitte seiner »Vorlesungen über Zahlentheorie« (1907).

Digitized by Google

hat man für $M = 24 : \sqrt{-5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{-3} - \sqrt{-2}$ und für $M = 40 : \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$. Man beachte hier die Übereinstimmung mit der Zerlegung von 24 und 40 in zwei Diskriminantenfaktoren, nämlich $24 = -3 . -8$ und $40 = 5 . 8$.

2. Wir nehmen jetzt, unter Beibehaltung des absoluten Rationalitätsbereiches, als Grundkörper k einen allgemeinen Abel'schen Zahlkörper. Es gilt dann der bekannte Kronecker'sche Fundamentalsatz, dass jeder solche Körper sich aus Kreisteilungskörpern herstellen lässt. Sind $p_1, p_2, \ldots, p_r$ die in der Diskriminante von k aufgehenden Primzahlen, so hat man demgemäss r Kreisteilungskörper $k_1, k_2, \ldots, k_r$, so dass die Diskriminante von k_i nur die einzige Primzahl p_i als Faktor enthält, und k als Unterkörper in dem aus $k_1, k_2, \ldots, k_r$ zusammengesetzten Körper auftritt. Nimmt man für k_i jedesmal den niedrigsten Körper mit der angegebenen Eigenschaft, so wird auch umgekehrt k_i Unterkörper in dem aus k und sämtlichen Körpern k_j mit $j \neq i$ zusammengesetzten Körper. Erhält man jetzt K durch Kombination von k und k_i, so wird K als Relativkörper in Bezug auf k schon durch k_i bestimmt, und $n(D_k)$ kann offenbar keine andere Primzahl als p_i enthalten. Derselbe Körper K erweist sich auch als Unterkörper in dem durch k und die Körper k_j zusammengesetzten Körper. Hieraus würde aber folgen, dass andererseits $n(D_k)$ nur die von p_i verschiedenen Primzahlen p_j enthalten kann. Es muss also $n(D_k)$ eine Einheit bedeuten, und *die Kreisteilungskörper, welche nach dem Kronecker'schen Satze für die Erzeugung eines Abel'schen Körpers nötig sind, stellen demnach als Relativkörper Klassenkörper dar.*

Die Analogie mit dem einfachen Falle eines quadratischen Grundkörpers erstreckt sich noch weiter. *Die Anzahl der Idealgeschlechter erweist sich z. B. als gleich dem Relativgrade des durch $k_1, k_2, \ldots, k_r$ erzeugten Körpers in Bezug auf k* [1]), und es wird auch im allgemeinen Falle *durch die Adjunktion dieser Körper die Klassengleichung nach den Geschlechtern zerlegt* [2]).

[1]) Für den Fall eines zyklischen Grundkörpers hat Herr *Värmon* die zugehörigen Geschlechtscharaktere untersucht.

[2]) Bei der grossen Berühmtheit des Kronecker'schen Satzes scheint es mir auffallend, dass ich nirgends Erwähnung von dem Zusammenhange mit dem Klassenkörper habe finden können. Wohl aber hat Herr *Takagi* in seiner Abhandlung »Über eine Theorie des relativ Abel'schen Zahlkörpers« (1920) viel umfassendere Resultate hergeleitet, ohne doch des oben behandelten Falles besonders zu gedenken.

Digitized by Google

3. Man beachte, dass die Klassenkörpereigenschaft der Körper k_i eigentlich nicht von dem Umstande abhängig ist, dass der Grundkörper als Abel'sch im absoluten Rationalitätsbereiche angenommen wird. Das Entscheidende ist in der Tat, dass die Diskriminanten je zweier Körper k_i gegen einander relative Primzahlen sind, und dass k sich als Unterkörper in dem von den k_i zusammengesetzten Körper herausstellen lässt. Es ist dann einleuchtend, dass sich in jedem Körper k_i ein Unterkörper befindet, welcher als Relativkörper in Bezug auf den durch die Körper k_j mit $j \neq i$ zusammengesetzten Körper die gleiche Struktur besitzt wie k, wenn man diesen Körper ebenfalls als Relativkörper betrachtet. Ersetzen wir die Körper k_i bez. durch diese Unterkörper, so wird offenbar auch jeder Körper k_i Unterkörper in dem durch k und die k_j erzeugten Körper. Es wird dann der durch die Körper k_i zusammengesetzte Körper unverzweigt in Bezug auf den Grundkörper k. Auch folgert man, dass die Diskriminanten der Körper k_i nur durch solche Primfaktoren teilbar sein können, welche schon in der Diskriminante d von k enthalten sind.

Digitized by Google

NEUERE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DEN PICARDSCHEN SATZ

VON

ROLF NEVANLINNA

1. Es sei $f(x)$ eine analytische Funktion der komplexen Variable x, die in einer gewissen Umgebung eines isolierten, wesentlich singulären Punktes eindeutig ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man diese Stelle in den unendlich fernen Punkt der x-Ebene verlegen. Es existiert dann eine so grosse Zahl ϱ_0, dass $f(x)$ in jedem endlichen Punkt des Kreisäusseren $|x| \geqq \varrho_0$ meromorph ist: jeder solche Punkt ist also entweder eine reguläre Stelle, wo die Funktion einen endlichen Wert annimmt, oder ein Pol, wo $f(x)$ unendlich wird.

Mit z bezeichne ich eine von der Variablen x unabhängige, endliche oder unendliche komplexe Zahl. Das Problem, über dessen Entwicklung ich im Folgenden kurz berichten werde, besteht in der Untersuchung der Verteilung der Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = z \tag{A}$$

in der Umgebung des singulären Unendlichkeitspunktes für verschiedene Werte z. Genauer handelt es sich um folgende Fragestellung: Für ein gegebenes z bezeichne ich mit $n(r; z)$ die Anzahl der Wurzeln der Gleichung (A) in einem Kreisring C_r, der von dem gegebenen Kreis $|x| = \varrho_0$ und einem grösseren, variablen Kreis $|x| = r$ begrenzt wird. Diese Anzahl ist eine für endliche Werte r endliche, mit wachsendem r nicht abnehmende Funktion von r. Es gilt nun das Anwachsen von $n(r; z)$ für unbeschränkt wachsendes r und verschiedene Werte z zu untersuchen.

2. Ich erinnere zunächst daran, dass es möglich ist, die Wurzeln der Gleichung (A) in der Umgebung des Unendlichkeitspunktes beliebig *für zwei Werte* z vorzuschreiben. Dies sieht man bekanntlich in folgender Weise ein: Es sei $a_1, a_2, \ldots$ eine Folge von Punkten der x-Ebene ohne endlichen Häufungspunkt; man

Digitized by Google

kann dann ein Weierstrass'sches, kanonisches Produkt $\pi_a(x)$ konstruieren, das eine in der ganzen endlichen Ebene reguläre Funktion definiert und in den Punkten a_μ (und nur in diesen) verschwindet. Wenn $b_1, b_2, \ldots$ eine zweite, beliebig vorgeschriebene Punktfolge ohne endlichen Häufungspunkt ist und $\pi_b(x)$ ein entsprechendes Weierstrass'sches Produkt bezeichnet, so stellt der Quotient

$$\frac{\pi_a(x)}{\pi_b(x)}$$

eine in der endlichen Ebene meromorphe Funktion dar, welche Nullstellen und Pole in den Punkten a_μ bzw. b_ν hat.

Es sei nun umgekehrt $f(x)$ eine für $\varrho_0 \leqq |x| < \infty$ eindeutige analytische Funktion mit denselben Nullstellen a_μ und Polen b_ν. Durch Division mit der soeben gebildeten meromorphen Funktion kann man diese Stellen wegschaffen und erhält so als Quotient eine für $\varrho_0 \leqq |x| < \infty$ eindeutige, von Null und Unendlich verschiedene Funktion. Eine solche Funktion kann aber bekanntlich in der Form $f_0(x)\, e^{g(x)}$ geschrieben werden, wo f_0 eine für $\varrho_0 < |x| < \infty$ von 0 und ∞ verschiedene Funktion ist, die im Punkte $x = \infty$ von *rationalem* Charakter ist, und $g(x)$ eine *ganze* Funktion bezeichnet. Der allgemeine Ausdruck einer analytischen Funktion von der betrachteten Art wird also

$$f(x) = f_0(x)\, e^{g(x)} \frac{\pi_a(x)}{\pi_b(x)}. \tag{1}$$

Hieraus findet man weiter leicht den allgemeinen Ausdruck einer für $\varrho_0 \leqq |x| < \infty$ eindeutigen analytischen Funktion, die in den Punkten a_μ und b_ν die beliebig vorgeschriebenen Werte A bzw. B annimmt. Man braucht hierzu nur den Ausdruck (1) einer linearen Transformation zu unterwerfen, welche die Funktionenwerte 0 und ∞ in bzw. A und B überführt.

3. Man sieht, dass die Angabe der Wurzeln der Gleichung $f(x) = z$ für *zwei* Werte z die betreffende analytische Funktion in hohem Grad willkürlich lässt; denn hat man die Produkte π_a und π_b festgelegt, so bleibt in der Formel (1) die ganze Funktion $g(x)$ vollkommen arbiträr. Auf diesem Umstand beruht es, dass man aus dem asymptotischen Verhalten der Wurzelanzahl $n(r; z)$ für *zwei* Werte z noch keine bestimmten Schlüsse über das Anwachsen dieser Anzahl für die übrigen Werte z ziehen

Digitized by Google

kann. Anders verhält es sich dagegen, wenn die Verteilung der Wurzeln für einen weiteren, dritten Wert z bekannt ist. Dies geht schon aus dem berühmten Satz hervor, den *Picard* [9] im Jahre 1879 entdeckte, und nach welchem die Wurzelanzahl $n(r; z)$ nicht für *drei* Werte z endlich sein kann, es sei denn, dass die entsprechende analytische Funktion im Punkte $x = \infty$ von rationalem Charakter und $n(r; z)$ also für *alle* Werte z endlich ist. Also:

Eine analytische Funktion nimmt in der Umgebung eines isolierten, wesentlich singulären Punktes alle Werte, ausser höchstens zwei, unendlich oft an.

Solche Werte z, welche die Funktion in einer gewissen Umgebung der singulären Stelle überhaupt nicht annimmt, nennt man ihre *Picard*schen Ausnahmewerte. Es ist klar, dass eine Funktion tatsächlich zwei Picardsche Ausnahmewerte haben kann; der allgemeine Ausdruck einer derartigen Funktion wird, falls die Ausnahmewerte 0 und ∞ sind, durch die Formel (1) gegeben, wenn man die kanonischen Produkte π_a und π_b weglässt[1]).

4. Da die Anzahl $n(r; z)$ nach dem Picardschen Satz höchstens für zwei Werte z identisch verschwindet, so entsteht die Frage, wie schnell diese Anzahl für verschiedene Werte z im Allgemeinen zunimmt. Die Ergebnisse, welche den Pichardschen Satz in dieser Richtung erweitern, beziehen sich zunächst auf eine etwas speziellere Funktionsklasse, als die oben betrachtete; sie setzen nämlich voraus, dass die betreffende analytische Funktion $f(x)$ *einen Picardschen Ausnahmewert a besitzt.* Es bedeutet hierbei keine Einschränkung anzunehmen, dass $a = \infty$ ist, denn sonst hat man nur die Funktion $\frac{1}{f-a}$ statt f zu betrachten. Die Funktionsklasse, welche uns im Folgenden vorläufig beschäftigen wird, besteht also aus allen in der Umgebung des Unendlichkeitspunktes eindeutigen und *regulären* Funktionen.

Für eine solche Funktion bestehen einige interessante Beziehungen zwischen dem Anwachsen der Grössen $n(r; z)$ einerseits und dem Wachstum oder Konvergenz der Funktion gegen den Picardschen Ausnahmewert ∞ andererseits. Das Anwachsen der Funktion wird gewöhnlich durch ihren Maximalmodul

[1]) Wenn z ein Picardscher Ausnahmewert ist, wollen wir die Zahl ϱ_0 so gross wählen, dass $f \neq z$ für $\varrho_0 \leqq |x| < \infty$. Ein solcher Ausnahmewert ist dann durch die Bedingung $n(r; z) \equiv 0$ charakterisiert.

Digitized by Google

$M(r) = \max_{|x|=r} |f(x)|$ beschrieben; $M(r)$ ist bekanntlich unter den gegebenen Voraussetzungen eine von einem gewissen Wert r ab wachsende Funktion von r und ihr Logarithmus eine konvexe Funktion von *logr*. Um die genannten Beziehungen zu formulieren, ist es bequem, von der in der Theorie der ganzen Funktionen üblichen Klassifikation wachsender Grössen Gebrauch zu machen.

Wenn $s(r)$ eine von einem gewissen Wert r ab definierte, positive Funktion von r ist, so wird die *Ordnung* von $s(r)$ als die obere Grenze

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log s(r)}{\log r}$$

definiert. Dass s von der endlichen Ordnung λ, oder wie man auch sagt, von der Ordnung r^λ ist, bedeutet demnach, dass, für ein gegebenes $\varepsilon > 0$, $s(r) < r^{\lambda+\varepsilon}$ für alle Werte r von einem gewissen ab gilt, während umgekehrt $s(r) > r^{\lambda-\varepsilon}$ für unendlich viele, unbeschränkt wachsende Werte r ist.

Eine allgemeine Eigenschaft der in der Umgebung des unendlich fernen Punktes regulären Funktionen könnte man kurz so ausdrücken, dass die Anzahl $n(r; z)$ für keinen Wert z schneller als $\log M(r)$ wächst. Wenn die Ordnung der letzgenannten Grösse insbesondere endlich ist, so gilt der präzise sog. erste Satz von *Hadamard* [4]:

Die Ordnung

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log n(r; z)}{\log r}$$

der Anzahl $n(r; z)$ ist nicht höher als die Ordnung

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \log M(r)}{\log r}$$

der Grösse $\log M(r)$.

In dieser Weise werden also die Grössen n durch das Anwachsen der Funktion nach oben beschränkt, und man fragt sich weiter, ob es nicht möglich ist eine *untere* Grenze für sie anzugeben. In dieser Hinsicht bewies *Borel* in seiner bekannten Arbeit über die Theorie der ganzen Funktionen [a] folgendes:

Die Ordnung der Anzahl $n(r; z)$ ist genau gleich der Ordnung der Grösse $\log M(r)$ für alle endlichen Werte z, ausser möglicherweise einem Ausnahmewert.

Digitized by Google

5. Man könnte den Inhalt dieses Picard-Borelschen Satzes kurz so ausdrücken, dass, bei einer regulären Funktion von endlicher Ordnung, die Wurzeln der Gleichung (A) mit einer für alle endlichen Werte z konstanten, dem Wachstum der Funktion entsprechenden Dichtigkeit auftreten, ausser möglicherweise für einen endlichen Ausnahmewert, für welchen diese Dichtigkeit kleiner sein kann. Nun hat es sich erwiesen, dass dieser Satz in derselben allgemeinen Fassung gültig ist, auch wenn feinere Unterschiede in den Verteilungsdichten der Wurzeln der Gleichung (A) berücksicktigt werden, und der Begriff eines Ausnahmewertes entsprechend genauer definiert wird. Unter derartigen Verschärfungen des Picard-Borelschen Satzes sind insbesondere einige von *Wiman, Lindelöf* und *Valiron* erzielte Ergebnisse hervorzuheben.

Wenn $s(r)$ eine wachsende, positive Funktion von der Ordnung r^λ bezeichnet, so sagt man nach *Pringsheim* [10], dass sie dem Maximal-, Normal- oder Minimaltypus dieser Ordnung angehört, je nachdem die obere Grenze

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{s(r)}{r^\lambda}$$

unendlich, endlich und positiv, oder gleich Null ist. Die Funktionen vom Minimaltypus kann man weiter in zwei Unterklassen einteilen: ich sage, $s(r)$ gehöre der Konvergenzklasse oder Divergenzklasse der Ordnung r^λ an, je nachdem das Integral

$$\int^\infty \frac{s(r)}{r^{\lambda+1}}\, dr$$

konvergent oder divergent ist[1]).

Lindelöf [b] zeigte, dass für eine reguläre Funktion von endlicher Ordnung nicht nur die Ordnung, sondern auch der *Pringsheimsche Typus* der Grösse $n(r; z)$ für alle endlichen Werte z konstant (und gleich dem Typus von $\log M(r)$) ist, ausser für einen eventuellen endlichen Ausnahmewert; und für die Funktionen vom Minimaltypus gilt sogar das schärfere von *Valiron* [c] herrührende Ergebnis, dass die Anzahl $n(r; z)$ (sowie $\log M$)

[1]) Die Bedeutung dieser letzten Begriffe für gewisse Fragen in der Theorie der ganzen Funktionen hat zuerst *Valiron* erkannt; er spricht von »classe inférieure« und »classe supérieure« [11, b].

Digitized by Google

entweder für alle z der Konvergenzklasse, oder für sämtliche endliche z, höchstens mit Ausnahme eines einzigen Wertes, der Divergenzklasse angehört.

Man gelangt indessen zu noch präziseren Aussagen, wenn man zur Beschreibung des Anwachsens der Fundamentalgrössen n und $\log M$ statt einer Potenz r^λ allgemeiner einen Ausdruck der Form

$$r^\lambda (\log r)^{\lambda_1} \cdots (\log_k r)^{\lambda_k} \tag{2}$$

benutzt, wo $\log_k$ den k-mal iterierten Logarithmus bezeichnet. Solche Vergleichsfunktionen sind in der Theorie der ganzen Funktionen von *Lindelöf* [*a*] eingeführt worden; man sagt, dass die Funktion $s(r)$ von der Ordnung (2) ist, falls für ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$s(r) < r^\lambda (\log r)^{\lambda_1} \cdots (\log_k r)^{\lambda_k + \varepsilon}$$

von einem gewissen Wert r ab besteht, während andererseits

$$s(r) > r^\lambda (\log r)^{\lambda_1} \cdots (\log_k r)^{\lambda_k - \varepsilon}$$

für unendlich viele beliebig grosse Werte r gilt. *Wiman* [12] hat den *Borel*schen Satz dahin verschärft, dass wenn die Grösse $\log M$ von der Ordnung (2) ist, dasselbe für die Anzahlen n gilt und zwar für jedes endliche z mit einer eventuellen Ausnahme; und später zeigte *Lindelöf* [*b*], dass ein ähnliches Ergebnis auch dann besteht, wenn man den Begriff des Ausnahmewertes definiert unter Berücksichtigung der drei möglichen »Typen« der betreffenden Ordnung (2), welche in Analogie mit den oben erwähnten *Pringsheim*schen Definitionen erklärt werden können.

6. Die oben besprochenen Ergebnisse beziehen sich sämtlich auf reguläre Funktionen von *endlicher* Ordnung. Auf Funktionen von *unendlicher* Ordnung, bei denen also $\log M$ schneller als jede Potenz von r wächst, wurde der *Picard-Borel*sche Satz zuerst von *Blumenthal* [1] erweitert. Um den Ordnungsbegriff für solche Funktionen zu verallgemeinern, konstruiert er zu dem Quotienten

$$v(r) = \frac{\log \log M(r)}{\log r},$$

dessen obere Grenze jetzt unendlich ist, eine wachsende *Vergleichsfunktion* $\overline{v}(r)$, die der Gleichheit

Digitized by Google

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \overline{v}}{\log v} = 1$$

und ausserdem gewissen Regularitätsbedingungen genügt[1]; eine ähnliche Vergleichsfunktion $\overline{w}(r; z)$ kann auch jedem der Quotienten

$$w(r; z) = \frac{\log n(r; z)}{\log r}$$

zugeordnet werden. Aus den Ergebnissen von *Blumenthal* geht dann u. a. hervor, dass die obere Grenze

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \overline{w}(r; z)}{\log \overline{v}(r)}$$

höchstens für einen endlichen Wertz kleiner als Eins sein kann.

In letzter Zeit hat *Valiron* [*a*] einige allgemeine Sätze gegeben, die besonders bemerkenswert sind, weil sie *direkte* Beziehungen zwischen den Fundamentalgrössen *log M* und *n* enthalten. Die wichtigsten Sätze von *Valiron* ergeben sich als Folgerungen der nachstehenden allgemeinen (für eine beliebige reguläre Funktion gültigen) Ungleichung:

Wenn $k > 1$, so existiert eine Grösse $C(k)$ derart, dass die Ungleichung

$$\log M\left(\frac{r}{k}\right) < C(k) \int_{\varrho_0}^{r} \frac{n(t; a) + n(t; b)}{t} dt + 0(\log r)$$

für jedes endliche Zahlenpaar a, b ($a \neq b$) von einem gewissen Wert r ab besteht[2]*).*

Aus dieser Beziehung folgt u. a., dass die obere Grenze

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log n}{\log_2 M}$$

höchstens für *einen* endlichen Wert *z* kleiner als Eins sein kann; ein Ergebnis, das bedeutend schärfer als der obige *Blumenthal*-

---

[1]) Näheres über diese Bedingungen findet man in der soeben zitierten Arbeit von *Blumenthal*.

[2]) Für Funktionen unendlicher Ordnung fand Valiron eine etwas weniger genaue Beziehung, die aus der oben gegebenen hervorgeht, wenn die linke Seite durch $(\log M)^{1-\varepsilon}$ ersetzt wird. Die obige genauere Fassung findet man in der Arbeit [8, *a*].

Digitized by Google

sche Satz ist, der sich auf das Verhältnis gewisser Vergleichsfunktionen der Grössen $log_2\ n$ und $log_3\ M$ bezieht.

7. Die oben besprochenen Ergebnisse können aus zwei Gründen als unbefriedigend bezeichnet werden: Erstens setzen sie voraus, dass die betreffende analytische Funktion einen *Picard*schen Ausnahmewert besitzt, und zweitens sind die obigen Definitionen für den Begriff eines *Ausnahmewertes* nicht von endgültiger Schärfe; es bleibt unentschieden, ob es nicht möglich wäre, diesen Begriff noch weiter zu verschärfen.

Von älteren Sätzen über *allgemeine* meromorphe Funktionen (ohne *Picard*sche Ausnahmewerte) sind einige von *Borel* herrührende zu erwähnen. *Borel* [*b*] hat die Theorie der meromorphen Funktionen auf die speziellere der ganzen Funktionen zurückgeführt, indem er eine meromorphe Funktion durch die Weierstrass'sche Formel (1) als Quotient von zwei ganzen Funktionen darstellt. Er schränkt sich hierbei auf den Fall ein, wo diese letzten Funktionen von endlicher Ordnung[1]) sind; die höhere der zwei Ordnungen wird dann als die Ordnung der meromorphen Funktion definiert. Die Anwendung der berühmten »elementaren« Methode[2]), durch welche *Borel* seine S. 4 erwähnte Erweiterung des *Picard*schen Satzes bewies und welche die Grundlage für die meisten weiteren Untersuchungen auf diesem Gebiete bildet, führt zu dem allgemeineren Ergebnis, dass die Anzahl $n(r;\ z)$ von derselben Ordnung ist, wie die betreffende meromorphe Funktion, und zwar *für jedes z ausser höchstens zwei Ausnahmewerten* (hierbei wird selbstverständlich auch der Wert $z = \infty$ berücksichtigt).

8. Dass die allgemeinen meromorphen Funktionen verhältnismässig wenig untersucht worden sind, beruht meines Erachtens auf einer gewissen Schwierigkeit, die ensteht, wenn man die Grundbegriffe der Theorie der ganzen Funktionen auf die Theorie der meromorphen Funktionen übertragen will. In jener Theorie wird die Verteilung und Dichtigkeit der Wurzeln der Gleichung $f = z$ mit dem *Wachstum* der Funktion f gegen den *Picard*schen Ausnahmewert ∞ in Beziehung gestellt. Welchen Sinn hat man

---

[1]) Die Ordnung einer ganzen Funktion f ist nach Definition gleich der Ordnung der Grösse $\log M(r)$.

[2]) *Picard* hat seinen Satz mit Hilfe der Modulfunktion bewiesen. Im Gegensatz zu dieser Beweismethode benennt man Beweise, wo diese Transzendente vermieden wird, elementar.

Digitized by Google

aber dem Begriff des Wachstums beizulegen, wenn f auch den Wert ∞ annimmt, und der Maximalmodul also auch für endliche Werte r unendlich wird? Zu einer befriedigenden Antwort auf diese Frage kommt man, wenn man zur Untersuchung einer meromorphen Funktion eine gewisse Integralformel benutzt, wo die Funktion durch die Randwerte ihres absoluten Betrages und ihre Pole und Nullstellen in einem Kreisring dargestellt wird. Die Anwendung dieser Formel sowie einiger Hilfsgrössen, welche sich in diesem Zusammenhang ungezwungen ergeben, führt zu einer allgemeinen und einheitlichen Theorie der meromorphen Funktionen, die nicht die Theorie der ganzen Funktionen voraussetzt, sondern vielmehr diese letzte Theorie in neuer Darstellung als Spezialfall enthält [8, c].

Man gelangt zu der erwähnten Darstellung der meromorphen Funktion f (vgl. 7 und 8, a), wenn man die Greensche Transformationsformel

$$\int\left(u\frac{\delta v}{\delta n}-v\frac{\delta u}{\delta n}\right)ds=-\int(u\triangle v-v\triangle u)\,d\omega$$

auf die Funktionen $u(\xi)=\log|f(\xi)|$ und $v(\xi)=\log\left|\frac{\varrho^2-\bar{x}\xi}{\varrho(x-\xi)}\right|$ im Kreisringe $\varrho_0\leqq|\xi|\leqq\varrho$ anwendet. Man findet so für $\varrho_0<|x|<\varrho$:

(3)
$$\log|f(x)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\varrho e^{i\vartheta})|\frac{\varrho^2-r^2}{\varrho^2+r^2-2\varrho r\cos(\vartheta-\varphi)}d\vartheta-\sum_{\varrho_0<|a_\mu|<\varrho}\log\left|\frac{\varrho^2-\bar{a}_\mu x}{\varrho(x-a_\mu)}\right|$$
$$+\sum_{\varrho_0<|b_\nu|<\varrho}\log\left|\frac{\varrho^2-\bar{b}_\nu x}{\varrho(x-b_\nu)}\right|+R(x),\quad(x=re^{i\varphi},\ \xi=\varrho e^{i\vartheta}),$$

wo

$$R(x)=\frac{\varrho_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\log|f(\xi)|\frac{\delta v(\xi)}{\delta n}-v(\xi)\frac{\delta\log|f(\xi)|}{\delta n}\right)d\vartheta\quad(\xi=\varrho_0e^{i\vartheta});$$

setzt man wiederum $x=0$, so ergibt sich die *Jensen*sche Formel

(4)
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\varrho e^{i\vartheta})|\,d\vartheta-\sum_{\varrho_0<|a_\mu|<\varrho}\log\frac{\varrho}{|a_\mu|}+\sum_{\varrho_0<|b_\nu|<\varrho}\log\frac{\varrho}{|b_\nu|}=O(\log\varrho).$$

Bezeichnet man nun für ein endliches z[1]:

[1]) $\overset{+}{\log}\,a$ ist gleich $\log a$ oder Null, je nachdem $a\geqq1$ oder $0\leqq a<1$.

Digitized by Google

$$m(r;z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}{}^{+}\log\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi})-z}\right|d\varphi,\quad N(r;z)=\int_{\varrho_0}^{r}\frac{n(t;z)}{t}\,dt$$

und für $z=\infty$:

$$m(r;\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}{}^{+}\log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi,\quad N(r;\infty)=\int_{\varrho_0}^{r}\frac{n(t;\infty)}{t}dt,$$

so nimmt diese letzte Formel die einfache Gestalt

$$m(r;\infty)+N(r;\infty)=m(r;0)+N(r;0)+O(\log r)$$

an.

9. Unter Anwendung dieser Formeln beweist man zunächst ohne Schwierigkeit nachstehenden Satz, den ich wegen seiner grundlegenden Wichtigkeit für die ganze Theorie *den ersten Hauptsatz* nenne:

Wenn $f(x)$ für $\varrho_0 \leqq |x| < \infty$ eindeutig und meromorph ist, so existiert eine bis auf eine Grösse $O(\log r)$ bestimmte, von einem gewissen Wert r ab wachsende Funktion $T(r)$ derart, dass die Beziehung

I) $$m(r;z)+N(r;z)=T(r)+O(\log r)$$

für jeden endlichen oder unendlichen Wert von z besteht[1]).

Falls der unendlich ferne Punkt wesentlich singulär ist, so ist weiter

(5) $$\lim_{r=\infty}\frac{T(r)}{\log r}=\infty.$$

Durch die linksstehende Summe in (I) wird das asymptotische Verhalten der meromorphen Funktion gegenüber dem betreffenden komplexen Wert z beschrieben. Ihr erstes Glied $m(r;z)$ charakterisiert für $r\to\infty$ die Geschwindigkeit der mittleren Konvergenz der Funktion gegen diesen Wert z, während das zweite Glied $N(r;z)$ durch die Verteilung und Dichtigkeit derjenigen Punkte bestimmt ist, in denen die Funktion denselben Wert z tatsächlich erreicht. Gemäss dem ersten Haupsatz weist nun die Funktion eine bemerkenswerte Symmetrie in ihrem Verhalten gegenüber allen möglichen Werten z auf, indem die Summe $m+N$ für sämtliche Werte z einen (abgesehen von dem Restglied

---

[1]) Als Funktion von $\log r$ ist $T(r)$ *konvex*.

Digitized by Google

$O(\log r)$) konstanten, durch die Fundamentalgrösse T angebenen Betrag besitzt.

Die neue Fundamentalgrösse $T(r)$ spielt in der Theorie der meromorphen Funktionen gewissermassen eine ähnliche Rolle, wie die Grösse $\log M(r)$ in der Theorie der ganzen Funktionen. In dem besonderen Fall, wo die gegebene Funktion f *regulär* ist, besteht auch ein naher Zusammenhang zwischen diesen beiden Ausdrücken. Es ist nämlich dann $N(r; \infty) \equiv 0$, und also nach dem Haupsatz (I) (wenn man $z = \infty$ setzt)

$$T(r) = m(r; \infty) + O(\log r) < \log M(r) + O(\log r).$$

Mittels der Formel (3) lässt sich auch eine Ungleichung aufstellen, die etwas in umgekehrter Richtung besagt, und man findet so, dass im Falle einer *regulären* Funktion, die Grössen $T(r)$ und $\log M(r)$ von derselben Ordnung (sogar von demselben Ordnungstypus) sind. Wie aus der Definition der Grösse N zu ersehen ist, trifft dies auch für die Grössen N und n zu, und man schliesst also, dass man in dem *Picard-Borel*schen Satz und seinen oben besprochenen Verschärfungen die Fundamentalgrössen $\log M$ und N durch bzw. T und n ersetzen könnte.

Das asymptotische Verhalten der Grösse $T(r)$ ist von entscheidender Bedeutung für die Eigenschaften der betreffenden meromorphen Funktion in der Umgebung des Unendlichkeitspunktes. Mittels der obigen Intregralformeln lässt sich eine Reihe von Sätzen beweisen, welche als besondere Fälle einige klassische Sätze aus der Theorie der ganzen Funktionen enthalten. Da diese Sätze in keinem unmittelbaren Zusammenhang mit dem Picardschen Satz stehen, will ich hier nicht näher auf sie eingehen.

10. Der erste Hauptsatz spricht die Invarianz der Summe $m(r; z) + N(r; z)$ für verschiedene Werte z aus, gestattet aber keine Aussagen über die relative Grösse der einzelnen Glieder m und N. In dieser Hinsicht wird er durch einen zweiten allgemeinen Satz ergänzt, welcher auch mittels der Formeln (3) und (4) hergeleitet werden kann, wenn auch der Beweis sich bedeutend schwieriger gestaltet als beim ersten Hauptsatz. Dieser *zweite Hauptsatz*, wie ich ihn nenne, lautet folgendermassen:

Es seien $f(x)$ eine für $\varrho_0 \leqq |x| < \infty$ eindeutige analytische Funktion und $z_1, z_2, \ldots, z_q$ $(q \geqq 3)$ unter einander verschiedene, endliche oder unendliche komplexe Zahlen. Dann genügt die zu

Digitized by Google

$f(x)$ gehörige Fundamentalgrösse $T(r)$ der Ungleichung

$$(q-2)\,T(r) < \sum_{1}^{q} N(r; z_\nu) - N_1(r) + S(r), \tag{II}$$

wo die zwei letzten Glieder folgende Bedeutung haben:

Die Grösse $N_1(r)$ wird durch die mehrfachen Wurzeln der Gleichungen $f = z$ gebildet in nachstehender Weise: Man bezeichne mit $n_1(r)$ die Anzahl sämtlicher mehrfachen Stellen der Funktion f im Kreisring $\varrho_0 \leqq |x| < r$, doch so, dass eine m-fache Stelle nur $(m-1)$ - mal gezählt wird; dann ist

$$N_1(r) = \int_{\varrho_0}^{r} \frac{n_1(t)}{t}\,dt.$$

Das Restglied $S(r)$ genügt der Ungleichung

$$S(r) < O(\log T(r)) + O(\log r), \tag{6}$$

ausser möglicherweise, wenn T von unendlicher Ordnung ist, für eine Wertmenge r von endlichem Mass[1]).

11. Um jetzt zu den Anwendungen dieses allgemeinen Satzes zu kommen, bemerke ich zunächst, dass dieses Ergebnis sogleich einen Beweis für den *Picard*schen Satz liefert. Nimmt man nämlich an, dass $N(r; z) \equiv 0$ für *drei* verschiedene Werte $z = z_1, z_2, z_3$ wäre, so leitet die Ungleichung (II) sofort zu einem Widerspruch. Es wäre nämlich dann für $q = 3$ (man bemerke, dass $N_1 \geqq 0$):

$$T(r) < S(r) < O(\log T(r)) + O(\log r),$$

ausser in den oben erwähnten Ausnahmeintervallen; dies steht aber in offenbarem Widerspruch mit der Eigenschaft (5) (S. 10).

Durch eine vollkommen analoge Überlegung sieht man ferner ein, dass auch der *Picard-Borel*sche Satz, sogar in der schärfsten Fassung, die ihm oben gegeben worden ist, ein fast unmittelbares Korollar der Beziehungen (II) und (I) ist. Man hat hierbei

---

[1]) Falls $T(r)$ von endlicher Ordnung ist, so gilt also ausnahmslos: $S(r) = O(\log r)$.

Ich habe die Hauptungleichung (II) zunächst für den Fall $q = 3$ bewiesen. Einige Bemerkungen, die mir von *Littlewood* brieflich mitgeteilt wurden, ermöglichten es die angewandte Beweismethode auf den Fall $q > 3$ auszudehnen. Unabhängig hiervon wurde diese Verallgemeinerung (für den Fall einer ganzen Funktion) von *Collingwood* [3] angegeben.

Digitized by Google

nur darauf zu achten, dass, wie schon oben hervorgehoben wurde, die Grössen $\log M$ und T (sowie allgemein n und N) bei einer regulären Funktion von demselben Ordnungstypus sind. Ohne auf diese Folgesätze näher einzugehen, werde ich im folgenden auf einige neue, schärfere Sätze aufmerksam machen, die ebenfalls leichte Folgerungen aus den zwei Hauptsätzen sind[1]).

12. Dividiert man beide Seiten der Formeln (I) und (II) durch $T(r)$, so folgt unter Beachtung der Beziehungen (5) und (6), dass

$$\lim_{r=\infty}\left(\frac{m(r;z)}{T(r)}\right)+\frac{N(r;z)}{T(r)}=1 \tag{I'}$$

und

$$q-2\leqq\sum_{1}^{q}\overline{\lim_{r=\infty}}\frac{N(r;z_\nu)}{T(r)}. \tag{II'}$$

Aus der ersten dieser Beziehungen schliesst man, dass die Grösse

$$\theta(z)=\lim_{r=\infty}\frac{m(r;z)}{T(r)}=1-\overline{\lim_{r=\infty}}\frac{N(r;z)}{T(r)} \tag{7}$$

im Intervalle

$$0\leqq\theta(z)\leqq 1$$

liegt. Führe ich nun den Wert $\overline{\lim}\frac{N}{T}=1-\theta$ in die Ungleichung (II)' ein, so wird

[1]) Bekanntlich kann man dem Picard-Borelschen Satze eine allgemeinere Fassung, als die oben besprochene, geben, wenn man statt der Gleichung (A) die allgemeinere

$$f(x)=\varphi(x), \tag{A'}$$

wo $\varphi(x)$ eine *meromorphe Funktion* ist, betrachtet: Sämtliche oben erörterten Sätze bestehen auch dann, wenn man die Konstante z durch eine meromorphe Funktion φ von *niedrigerer* Ordnung (oder Ordnungstypus) als f ersetzt.

Es ist nun möglich die Hauptungleichung (II) so zu erweitern, dass diese allgemeineren Sätze sich als unmittelbare Konsequenzen ergeben. Bezeichnen $\varphi_\nu(x)$ $(\nu=1,2,3)$ drei unter einander verschiedene meromorphe Funktionen derart, dass der Quotient $\frac{T(r,\varphi_\nu)}{T(r,f)}$ für $r\to\infty$ verschwindet, so gilt

$$T(r,f)<\sum_{1}^{3}N(r;\varphi_\nu)+S(r),$$

wo das Restglied S (abgesehen von gewissen Ausnahmeintervallen) im Verhältnis zu $T(r,f)$ unendlich klein ist (vgl. meine Arbeit [b], wo ich diese Beziehung für den Fall einer ganzen $f(x)$ hergeleitet habe, sowie die Note [d] von *Valiron*).

Digitized by Google

(III) $$\sum_{1}^{q} \theta(z_\nu) \leqq 2 \qquad (q \geqq 3).$$

Ich wende diese Ungleichung zunächst für $q = 3$ auf eine Funktion an, die einen Picardschen Ausnahmewert a, z. B. $a = \infty$, besitzt. Setze ich dann $z_3 = \infty$, so wird $N(z_3) \equiv 0$, $\theta(z_3) = 1$, und nach (III) also

$$\theta(z_1) + \theta(z_2) \leqq 1$$

für jedes endliche Wertpaar z_1, z_2. Man schliesst folglich, dass die Ungleichung.

(8) $$\theta(z) > \frac{1}{2}, \text{ oder also } \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r; z)}{T(r)} < \frac{1}{2}$$

bei einer regulären Funktion höchstens für *einen einzigen endlichen* Wert bestehen kann. In derselben Weise geht aus (III) hervor, dass eine allgemeine meromorphe Funktion (ohne Picardschen Ausnahmewert) der Ungleichung $\theta(z) \leqq \frac{2}{3}$ für alle Werte z genügen muss ausser höchstens für *zwei* Werte, für welche

(8)′ $$\theta(z) > \frac{2}{3}, \text{ oder also } \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r; z)}{T(r)} < \frac{1}{3}$$

sein kann (hierbei wird selbstverständlich auch der Wert $z = \infty$ berücksichtigt).

Der *Picard-Borel*sche Satz, nach welchem eine meromorphe Funktion höchstens zwei Ausnahmewerte und eine reguläre Funktion höchstens einen einzigen endlichen Ausnahmewert besitzen kann, behält also seine Gültigkeit, wenn man *einen Ausnahmewert* im Falle einer meromorphen Funktion durch die Ungleichung (8)′, im Falle einer regulären Funktion wiederum durch (8) definiert. Schärfer kann auch dieser Begriff nicht definiert werden, wenn man den Wortlaut des *Picard-Borel*schen Satzes beibehalten will. Durch Beispiele kann man nämlich zeigen, dass die rechtsstehenden Schranken in (8) und (8)′ nicht verbessert werden können. So genügt z. B. die ganze Funktion

$$\int_0^x e^{-t^2} dt$$

der Gleichheit

$$\lim_{r=\infty} \frac{N(r; z)}{T(r)} = \frac{1}{2}, \theta(z) = \frac{1}{2}$$

Digitized by Google

für die *zwei* asymptotischen Werte

$$z = \int_0^\infty e^{-r^2} dr \text{ und } z = -\int_0^\infty e^{-r^2} dr,$$

und die meromorphe Funktion

$$\int_0^x \frac{e^{-6t^2}}{(\cos(it^2))^2} dt$$

der Gleichheit

$$\lim_{r=\infty} \frac{N(r; z)}{T(r)} = \frac{1}{3}, \quad \theta(z) = \frac{2}{3}$$

für *drei* Werte z, nämlich

$$z = \infty \text{ und } z = \pm \int_0^\infty \frac{e^{-8r^2}}{(1 + e^{-2r^2})^2} dr.$$

Durch die obigen Definitionen eines Ausnahmewertes hat also der *Picard-Borel*sche Satz eine endgültige Fassung erhalten.

13. Die Ungleichung (III) führt zu weiteren Ergebnissen, wenn sie für $q > 3$ angewandt wird. Ist allgemein ε eine beliebige Zahl des Intervalles $0 < \varepsilon < 1$, so folgt aus (III), dass die Beziehung

$$\theta(z) > \varepsilon \quad \left(\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N}{T} < 1 - \varepsilon\right)$$

höchstens für eine *endliche* Anzahl $\left(< \frac{2}{\varepsilon}\right)$ Werte z bestehen kann. Dies gilt nun, wie klein auch die Zahl ε gewählt wird, und man schliesst demnach in bekannter Weise, dass die Menge der Werte z, für welche

(9) $$\theta(z) > 0 \left(\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r; z)}{T(r)} < 1\right)$$

ist, *abzählbar* sein muss. Für alle übrigen Werte ist $\theta = 0$ oder also $\overline{\lim} \frac{N}{T} = 1$.

Auf Grund dieser Beobachtung habe ich vorgeschlagen, dass man jeden Wert als einen *Ausnahmewert* definiert, *für welchen die Bedingung* (9) *erfüllt ist.* Die Zahl $\theta(z)$ nenne ich das *Gewicht* des Ausnahmewertes z. Das Gewicht ist um so grösser, je »stärker« der Ausnahmewert ist; insbesondere hat ein *Picard*scher Ausnahmewert das extreme Gewicht Eins.

Digitized by Google

Lässt man q in der Ungleichung (III) unbeschränkt wachsen, so gelangt man nun zu folgendem Satz:

Es seien $z_1, z_2, \ldots, z_\nu, \ldots$ die Ausnahmewerte einer in der Umgebung des Punktes $x = \infty$ eindeutigen analytischen Funktion. Dann ist die von ihren Gewichten gebildete Reihe

$$\sum_1^\infty \theta(z_\nu) \tag{10}$$

konvergent und ihre Summe höchstens gleich 2.

Es wurden schon oben Beispiele analytischer Funktionen angegeben, deren Ausnahmewerte die extreme Gewichtssumme 2 besitzen. Eine solche Funktion ist auch

$$\int_0^x e^{-t^q} dt,$$

welche den Ausnahmewert $z = \infty$ vom Gewichte Eins und die q endlichen Ausnahmewerte

$$z_\nu = e^{\frac{2\pi\nu i}{q}} \int_0^\infty e^{-r^q} dr \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, q)$$

vom Gewichte $\frac{1}{q}$ hat[1]). Eine interessante Aufgabe wäre eine Funktion mit (abzählbar) unendlich vielen Ausnahmewerten zu konstruieren. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass solche Beispiele unter den Funktionen von unendlich hoher Ordnung (und sogar mit der Gewichtsumme 2) tatsächlich vorhanden sind.

Wird der obige Satz insbesondere auf eine *reguläre* Funktion angewandt, für welche $\theta(\infty) = 1$ ist, so schliesst man, dass die Summe der Gewichte der endlichen Ausnahmewerte einer regulären Funktion höchstens gleich Eins sein kann.

Hat schliesslich die betrachtete analytische Funktion zwei *Picard*sche Ausnahmewerte a und b (oder ist allgemeiner $\theta(a) = \theta(b) = 1$); so gilt für alle übrigen Werte z:

$$\theta(z) = 0 \text{ oder also } \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r; z)}{T(r)} = 1.$$

---

[1]) Für diese Funktion ist $n(r; z_\nu) \sim \frac{q-1}{\pi} r^q$ $(\nu = 1, 2, \ldots, q)$ während für alle übrigen endlichen Werte z: $n(r; z) \sim \frac{q}{\pi} r^q$. *Sämtliche* $n(r; z)$ ausser $n(r; \infty)$ sind also vom *Normaltypus* der Ordnung r^q; die Ausnahmewerte z_ν unterscheiden sich von den normalen Werten nur durch den kleineren vorangehenden Faktor ($q-1$ statt q) in den asymptotischen Ausdrücken der Grössen n.

Digitized by Google

Aus der Hauptungleichung (II) folgt sogar, dass die schärfere Gleichung

$$\lim_{r=\infty} \frac{N(r; z)}{T(r)} = 1, \text{ und also auch}$$

$$\lim_{r=\infty} \frac{N(r; z_1)}{N(r; z_2)} = 1$$

für alle Werte z, z_1, $z_2 \neq a$, b bestehen muss. Hierbei hat man im Falle einer Funktion von unendlicher Ordnung zuerst eine Wertmenge r von endlichem Mass auszuschliessen[1]).

14. Zuletzt will ich in aller Kürze einige Fragen aus der Theorie der ganzen (und meromorphen) Funktionen *endlicher* Ordnung berühren. Es ist eine Folgerung aus der klassischen *Hadamard*schen, von *Lindelöf* und Anderen verschärften Theorie, dass der *Picard-Borel*sche Ausnahmefall nur für ganzzahlige Ordnungen eintreten kann; eine ganze Funktion von nichtganzzahliger Ordnung hat überhaupt keinen endlichen (eine meromorphe Funktion höchstens einen einzigen) Ausnahmewert. Dies setzt indessen voraus, dass man den Begriff des Ausnahmewertes in der früheren Weise unter Anwendung von »Ordnungen« oder »Ordnungstypen« definiert. Auf Grund gewisser Beispiele hat *Wiman* [12] die Vermutung ausgesprochen, dass es möglich wäre den genannten Begriff zu verschärfen derart, dass der im *Picard-Borel*schen Satz erwähnte Ausnahmefall auch bei nichtganzzahligen Ordnungen eintreten könnte. Dass dies tatsächlich der Fall ist, geht aus den obigen Ergebnissen hervor: man kennt Beispiele meromorpher und ganzer Funktionen nichtganzzahliger Ordnungen, bei denen Ausnahmewerte im Sinne der S. 14 angegebenen Erklärungen tatsächlich vorhanden sind.

An derselben Stelle hat *Wiman* weiter die Frage gestellt, ob nicht die Beziehung

$$\lim_{r=\infty} \frac{N(r; z_1)}{N(r; z_2)} = 1 \tag{11}$$

für eine ganze Funktion endlicher Ordnung für alle endlichen

---

[1]) Ich bemerke, dass die obigen Sätze überhaupt zu genauen Schranken für die Unbestimmtheitsgrenzen der Quotienten $\frac{N(r; z_1)}{N(r; z_2)}$ bzw. $\frac{n(r; z_1)}{n(r; z_2)}$ für verschiedene Werte z_1, z_2 führen. Diese Ergebnisse sind offenbar bedeutend schärfer als der am Ende der Nummer 6 erwähnte Satz von *Valiron*, wo der Quotient der *Logarithmen* der Anzahlen n abgeschätzt wird.

Digitized by Google

Werte z_1, z_2 mit eventueller Ausnahme eines einzigen Wertes gültig sei. Diese Vermutung wird durch die obigen Ergebnisse widerlegt. Denn wir haben gesehen, dass sogar äusserst regulär anwachsende ganze Funktionen existieren, die eine beliebig grosse Anzahl Ausnahmewerte von positivem Gewicht haben; und für diese Werte ist die Bedingung (11) offenbar nicht erfüllt. Nur in dem Falle, wo die analytische Funktion zwei »starke» Ausnahmewerte a und b von dem extremen Gewichte Eins besitzt, ist die Gültigkeit der Gleichung (11) für alle übrigen Werte z_1, z_2 sichergestellt.

LITERATURVERZEICHNIS[1])

1. *Blumenthal, O.: Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini* (Paris, Gauthier-Villars, 1910).
2. *Borel, E.:* a. *Sur les zéros des fonctions entières* (Acta math. t. 20, 1897).
   b. *Leçons sur les fonctions méromorphes* (Paris, Gauthier-Villars, 1903).
3. *Collingwood, E.: Sur quelques théorèmes de M. R. Nevanlinna* (Comptes rendus, t. 179, 1924).
4. *Hadamard, J.: Sur les propriétés des fonctions entières et en particulier une fonctions étudiée par Riemann* (Joun. de Math., 1893).
5. *Jensen, J. L. W. V.: Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions* (Acta math., t. 22, 1899).
6. *Lindelöf, E.:* a. *Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini* (Acta Soc. sc. Fennicae, t. 31, 1902).
   b. *Sur les fonctions entières d'ordre entier* (Ann. Écolè Norm., t. 22, 1905).
7. *Nevanlinna, F.* u. *R.: Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie* (Acta Soc. sc. Fennicae, t. 50, 1922).
8. *Nevanlinna, R.:* a. *Untersuchungen über den Picardschen Satz* (Acta Soc. sc. Fennicae, t. 50, 1924).
   b. *Über den Picard-Borelschen Satz in der Theorie der ganzen Funktionen* (Ann. Acad. sc. Fennicae, t. 23, 1924).
   c. *Zur Theorie der meromorphen Funktionen* (Acta math., t. 46, 1925).

---

[1]) Dieses Verzeichnis enthält nur die in der vorangehenden Übersicht zitierten Arbeiten. Eine ausführliche Zusammenstellung der Literatur findet man in dem Artikel von *Valiron: Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable* (Mémorial des sciences math., fasc. II, Paris 1925).

Digitized by Google

9. *Picard, E.:* *Mémoire sur les fonctions entières* (Ann. École Norm., t. 9, 1880).
10. *Pringsheim, A.:* *Elementare Theorie der ganzen transzendenten Funktionen von endlicher Ordnung* (Math. Ann., t. 58, 1904).
11. *Valiron, G.:* a. *Recherches sur le théorème de M. Picard dans la théorie des fonctions entières* (Ann. École Norm., t. 39, 1922).
b. *Sur les fonctions entières d'ordre fini* (Bull. sciences math., t. 45, 1921).
c. *Sur les fonctions entières d'ordre entier* (Comptes rendus, t. 174, 1922).
d. *Compléments aux théorèmes de Picard-Borel* (Comptes rendus, t. 179, 1924).
12. *Wiman, A.:* *Sur le cas d'exception dans la théorie des fonctions entières* (Arkiv. f. mat., astr. och fys., t. 1, 1903).

Digitized by Google

Digitized by Google

ÜBER DIE WERTEVERTEILUNG EINER ANALYTISCHEN FUNKTION IN DER UMGEBUNG EINER ISOLIERTEN WESENTLICH SINGULÄREN STELLE

VON

FRITHIOF NEVANLINNA

1 Sei $z(x)$ eine in der Umgebung $|x| \geqq \varrho_0$ des ∞-Punktes eindeutige, im Endlichen meromorphe Funktion. Im folgenden handelt es sich um die *Werteverteilung* der Funktion $z(x)$ in der Umgebung des unendlich fernen Punktes, also um die Verteilung der Wurzeln der Gleichung

$$z(x) = z \tag{1}$$

für alle endlichen und unendlichen komplexen Werte von z. Dieses Problem ist kürzlich von *Rolf Nevanlinna* in mehreren Arbeiten behandelt worden; ich erinnere an folgende von ihm erlangte Resultate.

Es bezeichne $n(r, \varrho_0; z)$, bei Beachtung der Multiplizitäten, die Anzahl der innerhalb des Kreisringes $\varrho_0 < |x| < r$ liegenden z-Stellen der Funktion $z(x)$; insbesondere bedeutet also $n(r, \varrho_0; \infty)$ die Anzahl der innerhalb dieses Kreisringes befindlichen Pole der Funktion. Dann ist offenbar der Mittelwert

$$N(r, \varrho_0; z) = \int_{\varrho_0}^{r} n(t, \varrho_0; z) \frac{dt}{t}$$

eine nicht negative, mit wachsendem r niemals abnehmende Funktion, die als Funktion von $\log r$ aufgefasst konvex ist[1]). Man setze ferner für $r \geqq \varrho_0$

[1]) Ich schreibe im folgenden der Kürze wegen $n(r; z)$ und $N(r; z)$ statt der oben eingeführten exakteren Bezeichnungen.

Digitized by Google

$$m(r; z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overset{+}{\log} \frac{1}{|z(re^{i\varphi}) - z|}\, d\varphi, \quad m(r; \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overset{+}{\log} |z(re^{i\varphi})|\, d\varphi.$$ [1]

Aus dem Jensen'schen Satz ergibt sich dann fast unmittelbar die Beziehung

$$m(r; z) + N(r; z) = m(r; \infty) + N(r; \infty) + O(\log r).$$

Betreffs der linksstehenden Summe lässt sich zeigen, dass sie für jedes z ($z = \infty$ einbegriffen) eine konvexe Funktion von $\log r$ ist. Wenn man also die nicht negative Funktion $T(r)$ für $r \geqq \varrho_0$ durch

$$T(r) = m(r; \infty) + N(r; \infty) + k \overset{+}{\log} r \tag{2}$$

definiert, so kann die positive Konstante k so gross angenommen werden, dass $T(r)$, ausser dass sie als Funktion von $\log r$ konvex ist, überdies für $r \geqq \varrho_0$ mit wachsendem r niemals abnimmt. Folglich gilt der von *Rolf Nevanlinna* herrührende

Satz I. *Zu jeder in der Umgebung* $|x| \geqq \varrho_0$ *des* ∞*-Punktes eindeutigen, im Endlichen meromorphen Funktion gehört eine für* $r \geqq \varrho_0$ *definierte, nicht negative, mit wachsendem* r *niemals abnehmende und in bezug auf* $\log r$ *konvexe Funktion* $T(r)$ *derart, dass für jedes endliche oder unendliche* z

$$m(r; z) + N(r; z) = T(r) + O(\log r). \tag{3}$$

Insbesondere ist also für jedes z

$$m(r; z) \leqq T(r) + O(\log r), \quad N(r; z) \leqq T(r) + O(\log r). \tag{4}$$

Die Funktion $T(r)$ kann als Indikator angesehen werden für die Art der Singularität, welche die Funktion $z(x)$ in dem ∞-Punkt aufweist. In der Tat lässt sich folgendes zeigen:

Falls $T(r) = O(\log r)$ (schwächer kann $T(r)$ gemäss seiner Definition (2) für $r \to \infty$ nicht wachsen), so ist die Funktion $z(x)$ im Unendlichen von rationalem Charakter und umgekehrt.

Falls

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log T(r)}{\log r} = \lambda \geqq 0$$

---

[1]) Es bezeichnet allgemein $\overset{+}{\log} a$ die Zahl $\log a$ oder o jenachdem $a > 1$ oder $o < a \leqq 1$.

Digitized by Google

endlich ist, so ist der ∞-Punkt für die Funktion $z(x)$ eine wesentlich singuläre Stelle *der Ordnung* λ. In der Umgebung einer solchen singulären Stelle ist die Wurzeldichte der Gleichung (1), wenigstens für ein *nicht* ganzzahliges λ, in einfach anzugebender Weise nach oben beschränkt, wenn man die Dichten der Verteilung zweier Funktionenwerte, z. B. der Null- und Unendlichkeitsstellen kennt. Bezüglich Einzelheiten verweise ich auf die Arbeiten *Rolf Nevanlinna*'s.

Falls schliesslich die oben mit λ bezeichnete Zahl unendlich ist, so ist der ∞-Punkt für $z(x)$ eine isolierte singuläre Stelle *unendlich hoher Ordnung*. In der Umgebung einer singulären Stelle dieser Art und desgleichen, falls es sich um eine singuläre Stelle von endlicher *ganzzahliger* Ordnung handelt, können aus den Verteilungen zweier Funktionenwerte noch keine Schlüsse betreffs der Wurzeldichte der Gleichung (1) für die übrigen Werte z gezogen werden. Anders verhält sich die Sache, wenn diese Wurzeldichte für drei oder mehrere Werte z gegeben ist; alsdann sind auch die Verteilungen aller übrigen Funktionenwerte z gewissen notwendigen Bedingungen unterworfen. Die in dieser Richtung liegenden Sätze von *Picard*, *Borel*, *Blumenthal*, *Valiron* u. A. gipfeln in einigen neuerdings von *Rolf Nevanlinna* bewiesenen Ungleichungen, die in folgendem Satze enthalten sind.

Satz II. *Sei* $z(x)$ *eine in der Umgebung* $|x| \geqq \varrho_0$ *des* ∞*-Punktes eindeutige, im Endlichen meromorphe Funktion und* $z_1, z_2, \ldots, z_q$ $(q > 2)$ q *verschiedene, endliche oder unendliche komplexe Zahlen. Man setze*

$$N(r) = \sum_1^q N\,r; z_\nu), \quad N_1(r) = N'(r; 0) + [2\,N(r; \infty) - N'(r; \infty)], \tag{5}$$

$$S(r) = (q - 2)\,T(r) - N(r) + N_1(r),$$

wo allgemein $N'(r; z)$ *die in Bezug auf die Ableitung* $z'(x)$ *gebildete Grösse* $N(r; z)$ *bezeichnet. Dann bestehen folgende Ungleichungen:*

1° *Für jedes* $\lambda > 0$ *und* $\varrho \geqq \varrho_0$ *ist*

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{S(r)}{r^{\lambda+1}}\,dr < O\left\{ \log^+ \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{T(r)}{r^{\lambda+1}}\,dr \right\} + O(1) \tag{6}$$

2° *Es ist für* $r \geqq \varrho_0$

$$S(r) < O\,(\log T(r)) + O\,(\log r), \tag{7}$$

Digitized by Google

mit eventueller Ausnahme einer Wertmenge, die mit Intervallen von endlicher Gesamtlänge überdeckt werden kann.

3° *Falls $z(x)$ insbesondere in der Umgebung des ∞-Punktes von endlicher Ordnung ist, so gilt die obige Ungleichung ausnahmslos und es ist also für jedes $r \geqq \varrho_0$.*

$$S(r) < O(\log r). \tag{8}$$

Im folgenden werde ich diesen Satz mittels einer neuen Methode beweisen, die von der von *Rolf Nevanlinna* angewandten prinzipiell abweicht und die vielleicht bei weiteren Untersuchungen über die Wertverteilung analytischer Funktionen und hiermit zusammenhängenden Fragen von Nutzen sein wird.

2. Der Kern der oben erwähnten Methode besteht in der Verwendung gewisser Partikulärlösungen der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta u = \varkappa e^u \quad (\varkappa > 0),$$

die bekanntlich in den Untersuchungen von *Picard*, *Poincaré*, *Bieberbach* u. A. über automorphe Funktionen und das Uniformisierungsproblem eine wichtige Rolle gespielt hat. Mittels einer einfachen Transformation kann sie auf die Form

$$\Delta u = e^{2u} \tag{9}$$

gebracht werden, welche für das folgende bequem ist.

Aus den Untersuchungen der genannten Autoren kann die Existenz einer reellen Lösung $u(z)$ der Differentialgleichung (9) von folgender Beschaffenheit erschlossen werden:

1° *$u(z)$ ist nebst ihren Ableitungen in der ganzen z-Ebene eindeutig und stetig, $q\,(>2)$ im Endlichen liegende, beliebig vorgegebene Punkte $z_1, z_2 \ldots z_q$ und den ∞-Punkt ausgenommen.*

2° *In der Umgebung eines der Punkte z_ν ist*

$$u(z) = \log \frac{1}{|z - z_\nu|} - \log_2 \frac{1}{|z - z_\nu|} + \varepsilon(z - z_\nu), \tag{10}$$

wo $\varepsilon(z)$ allgemein eine Funktion bezeichnet, die, nebst ihren mit $|z|$ multiplizierten Ableitungen erster Ordnung, für $z \to 0$ verschwindet. In der Umgebung des ∞-Punktes ist

$$u(z) = -2 \log |z| + \text{const.} + \varepsilon\left(\frac{1}{z}\right). \tag{11}$$

Digitized by Google

Durch diese Eigenschaften ist die Funktion $u(z)$ übrigens unter den Lösungen der Differentialgleichung (9) eindeutig bestimmt.

Für die technische Ausführung meines nachfolgenden Beweises der im Satz II aufgezählten Ungleichungen ist ferner folgende elementare Integralungleichung von Bedeutung:

Sei $F(p)$ eine in einem ein-oder mehrdimensionalen Gebiet G integrable, nicht negative Funktion des Punktes p, V das Volumen und dV das Volumelement des Gebietes G. Es gilt dann die Ungleichung

$$\frac{1}{V}\int_G \log F(p)\, dV \leqq \log\left\{\frac{1}{V}\int_G F(p)\, dV\right\}, \tag{12}$$

wonach also *der Mittelwert des Logarithmus einer nicht negativen Funktion nicht grösser ist als der Logarithmus des Mittelwertes dieser Funktion.* Diese Ungleichung ist eine fast unmittelbare Folge der für jedes $a > -1$ gültigen Beziehung $\log(1+a) \leqq a$.

3. Ich gehe jetzt über zur Herleitung der Ungleichungen (6), (7) und (8). Diese ergeben sich als Folgesätze aus dem nachfolgenden

Hilfssatz. Unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen des zweiten Satzes des einleitenden Artikels besteht für jedes den Bedingungen $\varrho_0 \leqq r < \varrho \leqq 2r$ genügende r und ϱ die Ungleichung

$$S(r) < \log\frac{1}{\varrho - r} + O(\log T(\varrho)) + O(\log \varrho). \tag{13}$$

Es seien $z_1, z_2, \ldots, z_q$ $(q > 2)$ q, zunächst endliche, komplexe Zahlen und $u(z)$ die mit den singulären Stellen $z = z_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, q)$ und $z = \infty$, der in Artikel 2 näher erklärten Art, behaftete reelle Lösung der Differentialgleichung (9). Mittels dieser und der zu untersuchenden, für $|x| \geqq \varrho_0$ eindeutigen und im Endlichen meromorphen analytischen Funktion $z(x)$ bilde man die zusammengesetzte Funktion

$$\overline{u}(x) = u(z(x)). \tag{14}$$

Diese reelle Funktion ist für $|x| \geqq \varrho_0$ eindeutig und, nebst ihren Ableitungen, stetig, mit Ausnahme der z_ν-und ∞-Stellen der Funktion $z(x)$, wo sie sich folgendermassen verhält:

In der Umgebung einer α-fachen z_ν-Stelle ξ ist

Digitized by Google

$$(15)\qquad \bar{u}(x) = \alpha \log \frac{1}{|x-\xi|} - \log_2 \frac{1}{|x-\xi|} + \text{const.} + \varepsilon(x-\xi)$$

und in der Umgebung einer α-fachen ∞-Stelle ξ der Funktion $z(x)$ ist

$$(16)\qquad \bar{u}(x) = -2\alpha \log \frac{1}{|x-\xi|} + \text{const.} + \varepsilon' x-\xi).$$

Ferner ist ganz allgemein $\Delta_x \bar{u}(x) = |z'(x)|^2 \Delta_z u(z\,x))$ und daher gemäss (9)

$$(17)\qquad \Delta \bar{u}(x) = |z'(x)|^2 e^{2\bar{u}(x)}.$$

Ich wende jetzt die Green'sche Transformationsformel an in dem Kreisring $\varrho_0 < |x| < \varrho$ auf die zusammengesetzte Funktion $\bar{u}(x)$ und die Funktion $\log \frac{\varrho}{|x|}$. Wenn hierbei in bekannter Weise die logarithmischen Singularitäten, also die z_ν-und ∞-Stellen der Funktion $z(x)$, mittels Kreise mit verschwindenden Halbmessern isoliert werden, so erhält man auf Grund der Beziehungen (15), (16) und (17) an der Grenze folgende Identität:

$$(18)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_{\varrho_0<|x|<\varrho} \log\frac{\varrho}{|x|}\,|z'(x)|^2\,e^{2\bar{u}(x)}\,d\sigma = \\ &\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \bar{u}(\varrho\,e^{i\vartheta})\,d\vartheta + \sum_1^q N(r; z_\nu) - 2\,N(r;\infty) + a\log\varrho + b, \end{aligned}$$

wo $d\sigma$ das Flächenelement des obigen Kreisringes und a und b von ϱ unabhängige Konstanten bedeuten.

In dieser Formel muss vor allem das rechts stehende Integral analysiert werden. Ich nehme hierzu die positive Zahl $\varkappa \leqq \frac{1}{e}$ so klein an, dass die Kreise $|z - z_\nu| = \varkappa$ $(\nu = 1, 2, \ldots, q)$ ausserhalb einander und innerhalb des Kreises $|z| = \frac{1}{\varkappa}$ liegen. In dem von diesen Kreisen begrenzten zusammenhängenden Gebiet ist $|u(z)|$ beschränkt und das zu behandelnde Integral kann daher in folgender Weise zerlegt werden:

$$(19)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \bar{u}(\varrho e^{i\vartheta})\,d\vartheta = \sum_1^q \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\nu|\leqq\varkappa} u(z(\varrho e^{i\vartheta}))\,d\vartheta + \frac{1}{2\pi}\int_{|z|\geqq\frac{1}{\varkappa}} u(z(\varrho e^{i\vartheta}))d\vartheta + O(1).$$

Digitized by Google

Gemäss (10) ist für $|z - z_\nu| \leqq \varkappa$.

$$u(z(\varrho e^{i\vartheta_1})) = \log \frac{1}{|z(\varrho e^{i\vartheta}) - z_\nu|} - \log_2 \frac{1}{|z(\varrho e^{i\vartheta}) - z_\nu|} + O(1);$$

da ferner

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_\nu| \leqq \varkappa} \log \frac{1}{|z(\varrho e^{i\vartheta}) - z_\nu|} d\vartheta = m(\varrho; z_\nu) + O(1)$$

und, gemäss der Ungleichung (12)

$$0 \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_\nu| \leqq \varkappa} \log_2 \frac{1}{|z(\varrho e^{i\vartheta}) - z_\nu|} d\vartheta \leqq \log \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_\nu| \leqq \varkappa} \log \frac{1}{|z'\varrho e^{i\vartheta}) - z_\nu|} d\vartheta + 1 \right\}$$

$$\leqq \log \{m(\varrho; z_\nu) + 1\},$$

so wird, bei Beachtung der ersten Ungleichung (4),

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_\nu| \leqq \varkappa} u(z(\varrho e^{i\vartheta})) d\vartheta = m(\varrho; z_\nu) + O(\log T(\varrho)), \quad (\nu = 1, 2, \ldots, q)$$

Von (11) ausgehend ergibt eine ähnliche Überlegung

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z| \geqq \frac{1}{\varkappa}} u(z(\varrho e^{i\vartheta})) d\vartheta = -2\, m(\varrho; \infty) + O(1).$$

Aus der Gleichung (19) folgt hiernach bei Beachtung der fundamentalen Relation (3) die Beziehung

$$(20) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \overline{u}(\varrho e^{i\vartheta})\, d\vartheta = (q-2)\, T(\varrho) - \sum_1^q N(\varrho; z_\nu) + 2N(\varrho; \infty) + O(\log T(\varrho)).$$

Auf Grund dieser Formel transformiert sich die Identität (18) in

$$\int_{\varrho_0 < |x| < \varrho} \log \frac{\varrho}{|x|} |z'(x)|^2 e^{2\overline{u}(x)} d\sigma = 2\pi (q-2)\, T(\varrho) + O(\log T(\varrho)) + O(\log \varrho),$$

woraus folgt, dass für jedes den Bedingungen $\varrho_0 \leqq r < \varrho' < \varrho$ genügende r und ϱ' die Beziehung

$$(21) \qquad \log \int_{r < |x| < \varrho'} \log \frac{\varrho}{|x|} |z'(x)|^2 e^{2\overline{u}(x)} d\sigma = O(\log T(\varrho))$$

besteht.

Digitized by Google

Gemäss der Ungleichung (12) ist die linke Seite dieser Gleichung nicht kleiner als

$$\frac{1}{\pi(\varrho'^2 - r^2)} \int_{r<|x|<\varrho'} \left\{ log_2 \frac{\varrho}{|x|} + 2\, log\, |z'(x)| + 2\, \bar{u}(x) \right\} d\varrho + log\, \pi(\varrho'^2 - r^2) =$$

$$\frac{4}{\varrho'^2 - r^2} \int_r^{\varrho'} t\, \frac{dt}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ \bar{u}(te^{i\vartheta}) + log\, |z(te^{i\vartheta})| \right\} d\vartheta + \frac{2}{\varrho'^2 - r^2} \int_r^{\varrho'} t\, log_2 \frac{\varrho}{t}\, dt +$$

$$log\, \pi\, (\varrho'^2 - r^2).$$

Hier ist nach (20)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \bar{u}\, (te^{i\vartheta})\, d\vartheta = (q - 2)\, T(t) - \sum_1^q N(t; z_\nu) + 2\, N(t; \infty) + O\,(log\, T(t))$$

und auf Grund des Jensen'schen Satzes

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} log\, |z'\, (te^{i\vartheta})|\, d\vartheta = N'(t; o) - N'(t; \infty) + O\,(log\, t).$$

Folglich ist mit Benutzung der Bezeichnungen (5)

$$\frac{2}{\varrho'^2 - r^2} \int_r^{\varrho'} tS(t)\, dt < O\,(log\, T(\varrho)) + \frac{2}{\varrho'^2 - r^2} \int_r^{\varrho'} t \left\{ O\,(log\, T(t)) + O\,(log\, t) \right\}$$

(22)

$$- \frac{1}{\varrho'^2 - r^2} \int_r^{\varrho'} t\, log_2 \frac{\varrho}{t}\, dt - \frac{1}{2}\, log\, \pi(\varrho'^2 - r^2).$$

Da die Grössen $T(t)$, $N(t)$ und $N_1(t)$ mit wachsendem t nicht abnehmen, so ist die linke Seite dieser Ungleichung nicht kleiner als

$$\frac{2}{\varrho'^2 - r^2} \int_r^{\varrho'} t\, \{(q - 2)\, T(r) - N(\varrho') + N_1(r)\}\, dt = S(r) - (N(\varrho') - N(r)).$$

Beachtet man jetzt, dass $\varrho \leqq 2r$ angenommen wurde, wonach $\varrho_0 \leqq r < \varrho' < \varrho \leqq 2r$, so findet man

$$log\, \frac{\varrho}{\varrho'} = log \left(1 + \frac{\varrho - \varrho'}{\varrho'} \right) > \frac{\varrho - \varrho'}{\varrho'}\, log\, 2 > \frac{log\, 2}{2r} (\varrho - \varrho')$$

Digitized by Google

und hiernach

$$-\frac{1}{\varrho'^2-r^2}\int_r^{\varrho'} t\log_2\frac{\varrho}{t}\,dt<-\frac{1}{2}\log_2\frac{\varrho}{\varrho'}<\frac{1}{2}\log\frac{1}{\varrho-\varrho'}+\frac{1}{2}\log r+O(1).$$

Ferner ist

$$-\frac{1}{2}\log\pi(\varrho'^2-r^2)<\frac{1}{2}\log\frac{1}{\varrho'-r}-\frac{1}{2}\log r+O(1).$$

Schliesslich hat man

$$\frac{2}{\varrho'^2-r^2}\int_r^{\varrho'} t\left\{O(\log T(t))+O(\log t)\right\}dt<O(\log T(\varrho))+O(\log\varrho).$$

Zusammenfassend folgt somit aus (22), dass für
$\varrho_0\leqq r<\varrho'<\varrho\leqq 2r$

$$S(r)<\frac{1}{2}\log\frac{1}{\varrho'-r}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{\varrho-\varrho'}+N(\varrho')-N(r)+O(\log T(\varrho))+O(\log\varrho). \tag{23}$$

Die bisher unbestimmte Zahl ϱ' fixiere ich jetzt durch die Relation

$$\varrho'=r+\frac{\varrho-r}{1+T(\varrho)}, \tag{24}$$

was zulässig ist, da hierbei der Bedingung $r<\varrho'<\varrho$ genügt wird. Dann ist

$$\frac{1}{2}\log\frac{1}{\varrho'-r}=\frac{1}{2}\log\frac{1}{\varrho-r}+\frac{1}{2}\log(1+T(\varrho))=\frac{1}{2}\log\frac{1}{\varrho-r}+O\log(T(\varrho))$$

und

$$\frac{1}{2}\log\frac{1}{\varrho-\varrho'}=\frac{1}{2}\log\frac{1}{\varrho-r}+\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{T(\varrho)}\right)=\frac{1}{2}\log\frac{1}{\varrho-r}+O(1).$$

Ferner hat man, da $N(t)$ eine konvexe Funktion von $\log t$ ist,

$$N(\varrho')-N(r)\leqq\frac{\log\frac{\varrho'}{r}}{\log\frac{\varrho}{r}}(N(\varrho)-N(r)).$$

Digitized by Google

Hier ist $\log \frac{\varrho'}{r} < \frac{\varrho' - r}{r}$, $\log \frac{\varrho}{r} > \frac{\varrho - r}{r} \log 2$ und $N(\varrho) - N(r) \leqq N(\varrho) < q\, T(\varrho) + O(\log \varrho)$, somit gemäss (24)

$$N(\varrho') - N(r) < \frac{\varrho' - r}{\varrho - r} O(T(\varrho)) = O(1).$$

Werden diese Abschätzungen in die Ungleichung (23) eingetragen, so ergibt sich schliesslich die zu beweisende Ungleichung

$$S(r) < \log \frac{1}{\varrho - r} + O(\log T(\varrho)) + O(\log \varrho),$$

die somit für $\varrho_0 \leqq r < \varrho \leqq 2r$ besteht.

Bei dem obigen Beweise wurden die Zahlen $z_1, z_2 \ldots, z_q$ sämtlich *endlich* angenommen. Man verifiziert jedoch leicht, dass die Ungleichung auch dann besteht, wenn eine dieser Zahlen unendlich ist.

4. Aus der Ungleichung (13) lassen sich nunmehr sämtliche Ungleichungen des zweiten Satzes des einleitenden Artikels leicht herleiten. Um die erste derselben, die Ungleichung (6), herzuleiten, nehme man die Zahl $\varrho \geqq 3\varrho_0$ beliebig an und setze

$$t = r + \varrho_0 \frac{\varrho - r}{\varrho - \varrho_0}.$$

Dann ist $r < t < r + \varrho_0 \leqq 2r$ für $\varrho_0 \leqq r < \varrho$ und man hat für diese Werte von r gemäss der oben bewiesenen Hilfsungleichung die Beziehung

$$S(r) < \log \frac{1}{t - r} + O(\overset{+}{\log}\, T(t)) + O(\log t).$$

Man multipliziere hier beiderseits mit $r^{-\lambda-1}$ $(\lambda > 0)$ und integriere zwischen den Grenzen ϱ_0 und ϱ. Eine leichte Rechnung zeigt, dass das erste und dritte Glied rechts hierbei Ausdrücke liefern, die für $\varrho \geqq \varrho_0$ beschränkt sind. Ferner ist, da $t \leqq 2r$ und $dr = \frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho - 2\varrho_0} dt \leqq 2\, dt$

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\overset{+}{\log}\, T(t)}{r^{\lambda+1}} dr \leqq 2^{\lambda+2} \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\overset{+}{\log}\, T(t)}{t^{\lambda+1}} dt$$

Digitized by Google

und, wie man auf Grund der Ungleichung (12) unmittelbar sieht,

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\overset{+}{log}\, T(t)}{t^{\lambda+1}}\, dt < k_1 + k_2 \overset{+}{log} \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{T(t)}{t^{\lambda+1}}\, dt,$$

wo k_1 und k_1 positive, von ϱ unabhängige Konstanten bezeichnen. Zusammenfassend wird hiernach

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{S(r)}{r^{\lambda+1}}\, dr < O\left\{ \overset{+}{log} \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{T(r)}{r^{\lambda+1}}\, dr \right\} + O(1),$$

eine Ungleichung, die nach obigem für $\varrho \geqq 3\varrho_0$ und somit für jedes $\varrho \geqq \varrho_0$ besteht.

Um aus der Hilfsungleichung (13) die Ungleichung (7) zu gewinnen, machen wir mit *Rolf Nevanlinna* von einem arithmetischen Satz von *Borel* Gebrauch. Da $T(r)$ mit wachsendem r niemals abnimmt, so ist nach diesem Satz für ein gegebenes $\varkappa > 1$ und jedes $r \geqq \varrho_0$

$$T(\varrho) < [T(r)]^{\varkappa}, \quad \text{falls} \quad \varrho = r + \frac{1}{log\, T(r)},$$

eine Wertmenge $I(\varkappa)$ von r möglicherweise ausgenommen, die jedoch mittels Intervalle von endlicher Gesamtlänge überdeckt werden kann. Da nun von einem gewissen Wert r ab $\varrho \leqq 2r$, so kann in unserer Hilfsungleichung ϱ wie oben angenommen werden und eine kurze Rechnung ergibt dann, dass für jedes r ausserhalb der Wertmenge $I(\varkappa)$

$$S(r) < O(log\, T(r)) + O(log\, r).$$

Falls insbesondere $T(r)$ von *endlicher* Ordnung ist, so hat man $O(log\, T(\varrho)) = O(log\, \varrho)$. Wenn also z. B. $\varrho = 2r$ gesetzt wird, so ergibt unsere Hilfsungleichung die in diesem Fall ausnahmslos gültige Ungleichung

$$S(r) < O(log\, r).$$

Hiermit ist der zweite Satz des einleitenden Artikels vollständig bewiesen.

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR LES ÉQUATIONS INTÉGRALES SINGULIÈRES

PAR

TORSTEN CARLEMAN

Peu de découvertes mathématiques ont été données par leur auteur sous une forme si achevée que la découverte de la solution de l'équation integrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x) \tag{1}$$

par M. Fredholm. Les nombreuses applications de cette théorie admirable ont pourtant amené un grand nombre de recherches concernant le cas où le noyau $K(x, y)$ est une fonction non bornée.

Parmi les propriétés fondamentales des solutions de l'équation de Fredholm nous citons les suivantes: 1) L'équation (1) admet une solution et une seule pourvu que λ n'appartienne pas à une certaine suite de valeurs singulières $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_\nu \ldots$ ne dépendant que du noyau $K(x, y)$ et n'ayant pas de point limite à distance finie. 2) Si λ est égal à l'une des valeurs singulières l'équation homogène admet un nombre fini de solutions non nulles et linéairement indépendantes. Si ces théorèmes sont vrais pour l'équation (1) nous dirons que celle-ci est une équation régulière. M. Fredholm démontra ses théorèmes non seulement dans le cas où $K(x, y)$ est une fonction bornée et intégrable mais aussi pour une classe étendue de noyaux infinis à savoir les noyaux qui admet un noyau itéré borné. Or la classe des équations régulières est plus vaste encore. C'est ce qu'on vérifie à l'exemple

$$K(x, y) = \Sigma \frac{\sin \nu x \cdot \sin \nu y}{\log^2 \nu}$$

Digitized by Google

qui ne peut pas admettre un noyau itéré borné à cause du fait que

$$\Sigma \frac{1}{\log^p \nu}$$

diverge quel que soit $p > 0$.

On démontre, plus généralement, que le noyau

$$H(x, y)\, \omega(x - y)$$

où $H(x, y)$ est une fonction bornée, est régulière pourvu que

$$\int_{-(b-a)}^{b-a} |\omega(s)|\, ds$$

existe.

Nous dirons qu'une équation intégrale est singulière si l'un ou l'autre des théorèmes fondamentales de Fredholm ne s'y appliquent pas. De telles équations ont été signalées pour la première fois par M. Hilbert. Nous ferons suivre ici quelques exemples dus à M. Picard, M. Goursat et M. Weyl.

1) $$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}\, \varphi(y)\, dy = 0$$

Cette équation admet les deux solutions $e^{\pm i\alpha x}$, α étant réel, pourvu que λ soit de la forme $\frac{1+\alpha^2}{2}$. Toute valeur réelle de λ, supérieure à $\frac{1}{2}$, est donc une valeur caractéristique.

2) $$\varphi(x) - \lambda \int_{\infty}^{\infty} \frac{(y-x)^n}{\underline{|n}}\, \varphi(y)\, dy = f(x),$$

$e^{-\alpha x}$ est une fonction fondamentale correspondant à la valeur singulière $\lambda = \alpha^{n+1}$ pourvu que la partie réelle de α soit positive. Si l'on pose $f(x) = \Sigma A_\nu e^{-\alpha_\nu x}$ on trouve la solution

$$\varphi(x, \lambda) = \Sigma \frac{A_\nu\, \alpha_\nu{}^{n+1}}{\alpha_\nu{}^{n+1} - \lambda}\, e^{-\alpha_\nu x}$$

On constate aisément qu'il est possible de choisir les α_ν de manière que $\varphi(x, \lambda)$ admette une ligne quelconque dans le plan des λ comme coupure essentielle.

Digitized by Google

3) $$\varphi(x) - \lambda \int_0^\infty \sin xy\, \varphi(y) dy = 0$$

Il correspond ici aux valeurs $\lambda = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ une infinité de fonctions fondamentales

$$\varphi(x) = \frac{x}{a^2 + x^2} \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-ax},\ (a > 0)$$

Citons finalement l'équation intégrale à laquelle conduit le problème de Neumann-Poincaré dans la théorie du potentiel logarithmique. Si le contour admet des point anguleux l'équation intégrale devient singulière. Nous nous bornons à indiquer quelques propriétés des solutions de l'équation homogène correspondante. Il ne peut exister de solutions continues que pour une suite de valeurs réelles de λ, suite qui n'admet pas de point limite à distance finie. D'autre part il existe des solutions discontinues mais bornées si λ appartient à certains segments réels s'étendant à l'infini. Si l'on tient compte encore des solutions infinies mais absolument intégrables un trouve un ensemble de valeurs fondamentales qui remplit une région à deux dimensions dans le plan des λ.

On ne possède pas aujourd'hui de théorie générale qui embrasse toutes les équations intégrales singulières. L'importance particulière des noyaux $K(x, y)$ réels et symétriques (ou plus généralement des noyaux hermitiens) fut mise en évidence par les travaux de M. Hilbert et de ses élèves. Sa théorie des formes quadratiques à une infinité de variables permet de traiter une classe étendue d'équations de ce genre, celle qui est caractérisée par les conditions.

(A) $$\int_a^b |\, K(x, y)\,|^2\, dy \text{ existe en général}$$

(B) $$\int_a^b \int_a^b K(x, y)\, u(x)\, \overline{u(y)}\, dx\, dy \leqq k^2 \int_a^b |\, u(x)\,|^2\, dx$$

k étant une constante indépendante de $u(x)$.

Dans ce qui suit nous parlerons d'une théorie plus générale ou l'on ne suppose remplie que la première des conditions ci-dessus.[1])

[1]) Cf. T. Carleman. Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique. Upsala universitets Årsskrift 1923.

Digitized by Google

Il est utile de rappeler d'abord quelques relations et résultats concernant les équations intégrales régulières à noyau hermitien.[1]) Soient dans l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x) \tag{2}$$

$K(x, y)$ un noyau hermitien continu (ou borné), $f(x)$ une fonction à carré intégrable et λ une constante non réelle. Si l'on multiplie cette équation par $\frac{\overline{\varphi(x)}}{\lambda}$ on trouve après intégration:

$$\frac{1}{\lambda}\int_a^b |\varphi(x)|^2\, dx - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f(x)\,\overline{\varphi(x)}\, dx = \int_a^b\int_a^b K(x, y)\,\overline{\varphi}(x)\,\varphi(y)\, dx\, dy$$

Le second membre étant une quantité réelle on en déduit

$$\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\bar{\lambda}}\right)\int_a^b |\varphi(x)|^2\, dx - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f(x)\,\overline{\varphi(x)}\, dx + \frac{1}{\bar{\lambda}}\int_a^b \overline{f(x)}\,\varphi(x)\, dx = 0 \tag{3}$$

Les fonctions φ et f sont donc liées entre elles par une relation qui est indépendante du noyau $K(x, y)$. Pour abréger nous introduisons pour le premier membre de (3) divisé par $\lambda - \bar{\lambda}$ le symbole

$$D(\varphi, f; \lambda)$$

On démontre aisément que $D(\varphi, f; \lambda) = 0$ est la condition nècessaire et suffisante pour que φ et f satisfassent à une relation de la forme (2) avec $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$

En posant

$$\varphi = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - \lambda}[f + \psi]$$

nous pouvons écrire la condition $D = 0$ sous la forme plus simple

$$\int_a^b |\psi(x)|^2\, dx = \int_a^b |f(x)|^2\, dx$$

ψ est donc une fonctionnelle linéaire et orthogonale de f.

[1]) Cela veut dire qu'on a $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$

Digitized by Google

De la formule (3) on déduit aisément, en appliquant l'inégalité de Schwarz

$$(4) \qquad \int_a^b |\varphi(x)|^2\,dx \leqq \frac{4\,|\lambda|^2}{|\lambda-\bar{\lambda}|^2}\int_a^b |f(x)|^2\,dx$$

$\int_a^b |\varphi(x)|^2\,dx$ admet par conséquent une borne supérieure indépendante de $K(x, y)$, résultat qui joue un rôle fondamental pour les recherches que nous allons exposer.

Soient g et f deux fonctions données. Si dans l'équation (2) on fasse varier $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$ d'une manière arbitraire la quantité

$$Z = \int_a^b g(x)\,\varphi(x)\,dx$$

décrira dans le plan des Z un cercle C avec le centre $\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}-\lambda}\int_a^b g(x)\,f(x)\,dx$ et le rayon $\left|\frac{\lambda}{\bar{\lambda}-\lambda}\right| \cdot \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2\,dx \cdot \int_a^b |f(x)|^2\,dx}$ Si l'on ne suppose $K(x, y)$ variable que dans le domaine $a \leq \frac{x}{y} \leq a + d < b$, Z parcourira un cercle C_d situé à l'intérieur de C.

Pour finir ces préliminaires nous allons rappeler le lemme suivant concernant des suites infinies de fonctions à carré intégrable. Soient $f_1, f_2, \ldots f_n \ldots$; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \ldots$ deux suites de fonctions à carré sommable qui tendent vers des limites f et φ presque partout.

Supposons en outre

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2\,dx < C,$$

ou C est une constate indépendante de n. L'équation

$$(5) \qquad \lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,\varphi_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

est légitime s'il existe une fonction $h(x)$ à carré intégrable telle qu'on ait

$$|f_n(x)| \leqq h(x)$$

Digitized by Google

La relation (5) subsiste encore si la suite $f_n(x)$ tend fortement vers sa limite, c'est-à-dire si l'on a

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 \, dx$$

Considérons maintenant une équation à noyau hermitien.

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x) \tag{6}$$

où le second membre est une fonction à carré intégrable. Pour plus de simplicité nous supposons que $K(x, y)$ soit continu (ou borné) en chaque point du domaine $a \leq \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \leq b$ sauf au point (a, a) ou il pourra devenir infini d'une manière quelconque. Nous nous proposons à étudier les solutions à carré intégrable de (6) pour λ-valeurs non réelles.

Soit $G_1(x, y)$, $G_2(x, y) \ldots G_n(x, y) \ldots$

une suite de noyaux hermitiens réguliers.[1]) telle qu'on ait

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b |K(x, y) - G_n(x_1\, y)|^2 \, dy = 0 \text{ pour } x \neq a.$$

En utilisant la formule (4) on voit que la solution $\varphi_n(x)$ de l'équation

$$\varphi_n(x) - \lambda \int_a^b G_n(x, y)\, \varphi_n(y)\, dg = f(x) \tag{7}$$

satisfait à l'inégalité

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 \, dx \leq \frac{4\,|\lambda|^2}{|\lambda - \bar{\lambda}|^2} \int_a^b |f(x)|^2 \, dx$$

On en conclut que la suite

$$\int_a^b K(x, y)\, \varphi_n(y)\, dy$$

[1]) On peut par exemple prendre $G_n(x, y) = K_{d_n}(x, y)$ $(d_n \to 0)$, $K_d(x, y)$ désignant un noyau qui est égal à $K(x, y)$ partout sauf dans le domaine $a \leq \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \leq a + d$ où il prend des valeurs quelconques satisfaisant à la relation $K_d(x, y) = \overline{K_d(y, x)}$.

Digitized by Google

est bornée et également continu dans tout intervalle $(a+\varepsilon, b)$. Ceci posé, si l'on écrit (7) sous la forme

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b (G_n(x,y) - K(x,y))\,\varphi_n(y)\,dy + \lambda \int_a^b K(x,y)\,\varphi_n(y)\,dy$$

il est visible que les $\varphi_n(x)$ forment une famille normale de fonctions (au sens de M. Montel), c'est-à-dire qu'on peut en extraire une suite partielle $\varphi_{n_1}(x)$, $\varphi_{n_2}(x) \ldots \varphi_{n_\nu}(x) \ldots$ qui converge pour $a < x < b$. Des raisonnements bien connus montrent qu'il est possible de choisir cette suite de manière que convergence ait lieu pour toute fonction $f(x)$ et pour toute valeur non réelle de λ.

La fonction limite

$$\lim_{\nu=\infty} \varphi_{n_\nu}(x) = \varphi(x)$$

est une fonctionnelle linéaire $T(f;\lambda)$ de f qui satisfait à l'équation intégrale (6). C'est ce qu'on voit en faisant tendre $n = n_\nu$ vers l'infini dans (7) et en tenant compte du lemme mentionné plus haut.

Les solutions $\psi_{n_\nu}(x)$ de l'équation associée à (7) tendent pour $\nu \to \infty$ vers une limite

$$\lim_{\nu=\infty} \psi_{n_\nu}(x) = \psi(x) = T'(g;\lambda)$$

qui représente une solution de

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b \overline{K(x,y)}\,\psi(y)\,dy = g(x)$$

$G_n(x,y)$ étant un noyau régulier on a

$$\int_a^b \psi_{n_\nu}(x)\,f(x)\,dx = \int_a^b \varphi_{n_\nu}(x)\,g(x)\,dx$$

d'ou l'on conclut à cause de (5)

$$\int_a^b T'(g;\lambda)\,f\,dx = \int_a^b T(f;\lambda)\,g\,dx \tag{8}$$

équation très importante pour l'étude qui nous occupe.

Des relations

$$D(\varphi_{n_\nu}, f;\lambda) = D(\psi_{n_\nu}, g;\lambda) = 0$$

on ne peut conclure que

Digitized by Google

$$D(T, f; \lambda) \geq 0, \quad D(T', g; \lambda) \geq 0$$

Pour que le signe d'égalité soit valable dans ces formules il faut et il suffit que $\varphi_{n_\nu}(x)$ et $\psi_{n_\nu}(x)$ tendent fortement vers leurs limites.

Il résulte de ce qui précède que l'équation (6) admet toujours au moins une solution à carré intégrable.

Celle-ci n'est pas toujours la seule possible. On peut en effet constuire des noyaux tels que l'équation homogène correspondante admette une infinité de solutions. Pour simplifier nous supposons dès maintenant que $K(x, y)$ soit un noyau réel. On démontre en se servant de la relation (8) que le nombre ϱ de solutions linéairement indépendantes de l'équation.

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0$$

est le même pour toutes les valeurs non réelles de λ. Nous dirons que $K(x, y)$ est de la classe I ou II suivant que $\varrho = 0$ ou $\varrho > 0$.

La condition nécessaire et suffisante pour que $K(x, y)$ appartienne à la classe I est que le rayon du cercle C_d dont il a été question à la page (5) tend vers zéro quelles que soient $f(x)$ et $g(x)$.

Si $K(x, y)$ appartient à la classe II il existe une infinité de fonctionnelles $T(f; \lambda)$ qui s'obtiennent par un passage à la limite du type considéré plus haut. Parmi celles-ci il y a une infinité qui sont fonctions limites des suites $\varphi_{n_\nu}(x)$ fortement convergentes. Nous les appellerons solutions maximales. Citons ici le théorème suivant: Si $\varphi_n(x)$ converge fortement pour une valeur non réelle de λ (et pour chaque fonction $f(x)$) il en est de même pour toute autre valeur non réelle de λ. L'ensemble des valeurs que prennent les diverses $Z = T(f; \lambda)$ si x et λ sont des nombres donnés est constitué par un cercle dans le plan des Z.

A chaque fonctionnelle $T(f; \lambda)$ correspond une fonction spectrale $\theta(x, y \mid \lambda)$ telle qu'on ait

$$T(f; \lambda) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu - \lambda}\, d_\mu \int_a^b \theta(x, y \mid \mu)\, f(y)\, dy \ ^{1})$$

[1]) L'intégrale est un intégrale de Stieltjes par rapport à μ.

Digitized by Google

Si l'on désigne le systeme orthogonal et normal de fonctions fondamentales qui appartient au noyau $G_{n_\nu}(x, y)$ par $\varphi_{\nu, p}(x)$ $(p = 1, 2 \ldots)$ et les valeurs fondamentales correspondantes par $\lambda_{\nu, p}$, la fonction $\theta(x, y; \lambda)$ peut se définir comme suit

$$\theta(x, y \mid \lambda) = \lim_{\nu = \infty} \sum_{0 < \lambda_{\nu, p} < \lambda} \varphi_{\nu, p}(x)\, \overline{\varphi_{\nu, p}(y)} \qquad \text{pour } \lambda > 0$$

$$\theta(x, y \mid \lambda) = \lim_{\nu = \infty} - \sum_{\lambda \leq \lambda_{\nu, p} < 0} \varphi_{\nu, p}(x)\, \overline{\varphi_{\nu, p}(y)} \qquad \text{pour } \lambda < 0$$

Si $h(x)$ est une fonction quelconque à carré intégrable on a les formules

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_\lambda \int_a^b \int_a^b \theta(x, y \mid \lambda)\, h(x)\, \overline{h(y)}\, dx\, dy \leq \int_a^b |h(x)|^2\, dx$$

$$\int_a^b K(x, y)\, h(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda}\, d_\lambda \int_a^b \theta(x, y \mid \lambda)\, h(y)\, dy$$

La fonction spectrale d'un noyau de la classe I satisfait aux mêmes relations d'orthogonalité qui sont valables pour les noyaux »bornés« de M. Hilbert. Ces relations peuvent se réunir dans la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\omega(\lambda)|^2\, d_\lambda \int_a^b \int_a^b \theta(x, y \mid \lambda)\, h(x)\, \overline{h(y)}\, dx dy = \int_a^b \Big| \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda)\, d_\lambda \int_a^b \theta(x, y \mid \lambda)\, h(y)\, dy \Big|^2 dx \tag{9}$$

où $\omega(\lambda)$ désigne une fonction continue quelconque. Or cette équation subsiste dans des cas plus généraux. On démontre: La condition nécessaire et suffisante pour que (9) ait lieu est que $T(f; \lambda)$ soit une solution maximale.

Parmi les nombreuses applications de la théorie des équations intégrales singulières nous citons la théorie des fractions continues de Stieltjes et de M. Hamburger et les problémes des moments correspondants.

Considérons le problème: dèterminer une fonction non décroissante $\sigma(x)$ telle qu'on ait

Digitized by Google

$$(10) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^n \, d\sigma(x) = c_n, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

les c_n étant des constantes données. On peut y associer (pourvu qu'il existe une solution) un certain noyau $K(x, y)$ réel et symétrique, dont les fonctions spectrales correspondent d'une manière biunivoque aux solutions $\sigma(x)$. La condition nécessaire et suffisante pour que le problème (10) soit déterminé est que $K(x, y)$ soit de la classe I. Nous ne pouvons pas ici entrer en détails sur les relations qui existent entre la théorie des équations intégrales et le problème des moments. Nous nous bornerons à la remarque suivante. Il correspond à la suite c_ν certains polynômes $\psi_n(x)$ définis par les relations d'orthogonalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(x) \, \psi_q(x) \, d\sigma(x) = \begin{matrix} 0, & p \neq q \\ 1 & p = q \end{matrix}$$

Il est d'intérêt de savoir si le théorème de Parseval

$$(11) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x)^2 \, d\sigma(x) = \Sigma \left[\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) \, \psi_p(x) \, d\sigma(x) \right]^2$$

est vrai pour ce système de fonctions orthogonales. Or en introduisant la fonction spectrale $\theta(x, y \mid \lambda)$ qui correspond à $\sigma(x)$ la relation (11) se transforme en (9). C'est ainsi que j'ai démontré que (11) est certainement vérifié si le problème des moments est déterminé.[1]) M. Marcel Riesz[2]) vient de donner la condition nécessaire et suffisante pour que la relation (11) ait lieu. Cette condition peut aussi s'obtenir comme un corollaire du résultat général concernant la légitimité de la formule (9) que j'ai énoncé plus haut.

[1]) Loc. cit. p. 213.

[2]) Sur le problème les moments et le théorème de Parseval correspondant Skandinavisk Aktuarietidskrift 1924.

Digitized by Google

F. KLEINS SATZ ÜBER DIE REELLEN SINGULARITÄTEN EINER ALGEBRAISCHEN KURVE

VON

C. JUEL

Die Theorie der algebraischen Kurven ist durch die Algebra geschaffen. Aber die algebraischen Rechenregeln und die daraus abgeleiteten Sätze sind unabhängig davon, ob die eingehenden Konstanten und Variablen reell oder komplex sind. Wenn man daher eine Trennung zwischen reellen und imaginären Grössen einführen will, verlässt man eigentlich das rein algebraische Gebiet.

Es ist unter anderem auch aus diesem Grunde leicht verständlich, dass in der Theorie der algebraischen Kurven zuerst Relationen zwischen den singulären Punkten und den singulären Tangenten gefunden worden sind, welche davon unabhängig sind, ob die Elemente reell oder imaginär waren. Diese Relationen, die sogenannten *Plücker*schen Formeln, wurden vor ungefähr hundert Jahren gefunden (1834).

Aber erst im Jahre 1876 veröffentlichte der vor kurzem verstorbene grosse deutsche Mathematiker *Felix Klein*[1]) eine Relation zwischen den reellen Singularitäten einer reellen algebraischen Kurve. Dieselbe lautet mit den Bezeichnungen des Urhebers:

$$n + w' + 2t'' = k + r' + 2d''.$$

Hier bedeutet w' die Zahl der reellen Inflexionspunkte, t'' die Zahl der reellen isolierten Doppeltangenten, r' und d'' die entsprechenden dualistischen Zahlen, n und k Ordnung und Klasse der Kurve.

Für eine imaginäre algebraische Kurve findet Klein als ein wichtiges Beispiel seines Satzes:

$$\delta - \tau = n - k,$$

wo δ die Zahl der reellen Punkte und τ die Zahl der reellen Tangenten der Kurve ist.

Digitized by Google

Der Satz ist kaum hinreichend in die Lehrbücher eingedrungen, aber er ist selbstverständlich wohl bekannt und hat zu mehreren wichtigen Arbeiten Anlass gegeben. Am bedeutendsten sind wohl zwei, die eine von einem Holländer *Schuh*[2]), die andere von einem Amerikaner *Coolidge*[3]).

Der erste erweitert den Satz derart, dass er auch Punkte und Tangenten mitnimmt, welche höhere Singularität haben, und er schreibt die Relation in der eleganten Form

$$\Sigma s - \Sigma t = k - n.$$

Hier bedeuten s und t Ordnung und Klasse eines beliebigen Kurvenpunktes, denn man kann über die ganze Kurve summieren, weil $s - t$ für einen gewöhnlichen Punkt verschwindet.

Die Bedeutung von Ordnung und Klasse ist sehr einfach; wird ein Hyperzweig der Kurve in der Nähe des Punktes in Parallelkoordinaten durch die Gleichung

$$y = a x^{\frac{s+t}{t}}$$

dargestellt, wo der Bruch unverkürzbar ist, dann ist t die Ordnung, s die Klasse des Punktes.

Der andere Autor, Coolidge, beweist sehr schön, dass die Kleinsche Relation die einzige ihrer Art ist, welche für *jede* algebraische Kurve gültig ist.

Ich werde mit wenigen Worten die Beweise erwähnen, welche man für den Satz gegeben hat, besonders den ursprünglichen von Felix Klein. Sein Ausgangspunkt ist die Bemerkung von *H. G. Zeuthen*[4]), dass wenn bei der stetigen Variation einer reellen algebraischen Kurve zwei einander naheliegende Wendepunkte zusammenfallen, um danach zu verschwinden, dann erst eine vierpunktig berührende Tangente und danach eine isolierte Tangente auftreten wird. Für eine Kurve vierter Ordnung erhält man in Übereinstimmung hiermit

$$w' + 2t'' = 8.$$

Diesen Satz erweitert F. Klein wesentlich durch dieselbe Methode zu dem allgemeineren

$$w' + 2t'' = n(n-2),$$

welche für jede reelle algebraische Kurve n-*ter* Ordnung ohne Doppelpunkte und Spitzen gültig ist.

Digitized by Google

Um danach die ausgelassenen Singularitäten einführen zu können, kommt es wesentlich darauf an, die Verbindungslinie zweier konjugierten Doppelpunkte — und Spitzen — zu betrachten, und zu finden, wie viele isolierte Tangenten darin zusammenfallen. Dies findet Klein, indem er die allgemeine Kurve durch eine spezielle Kurve vierter Ordnung ersetzt. Indem er nun die gefundenen Relationen mittels der Plückerschen etwas umschreibt, kommt er zu seiner bewunderungswerten Formel.

Schuh hat eigentlich keinen neuen Beweis gegeben; er löst die höheren Singularitäten in einfachere auf, und die ursprüngliche Relation ergibt dann die oben genannte ganz allgemeine Relation.

A. Brill[5]) hat einen rein algebraischen Beweis des Satzes zu geben versucht; dieser ist aber nur für rationale Kurven stichhaltig.

Endlich hat *Perrin*[6]) einen ganz neuen Beweis gegeben. Er untersucht den Ort der Punkte, aus denen man an eine reelle algebraische Kurve zwei Tangenten ziehen kann, welche einen konstanten imaginären Winkel miteinander bilden (L'isomorphique de la courbe); diese Kurve unterwirft er einer rein topologischen Behandlung. Der Gedanke ist etwas künstlich, wenn auch interessant, die Ausführung aber leider zu weitläufig, um hier näher behandelt werden zu können.

Ich werde jetzt zu dem Beweis übergehen, welchen ich schon im Jahre 1905 gegeben habe[7]). Ich verband damals die Hauptidee mit anderen Betrachtungen; überdies sind leider auch mehrere sinnstörende Druck- und Schreibfehler stehen geblieben. Ich hoffe, dass die folgende Darstellung die Einfachheit des Beweises hervortreten lassen wird.

Ich beweise zunächst den zweiten Satz, also die Relation

$$\delta - \tau = n - k,$$

wo wie oben δ und τ die Zahlen der reellen Punkte und reellen Tangenten der Kurve angeben. Die in einer reellen Ebene π liegende imaginäre Kurve γ unterwerfe ich einer Reihe von imaginären Parallelverschiebungen, und es zeigt sich, dass dabei die Differenz $\delta - \tau$ unverändert bleibt. Die Verschiebungen von γ lassen sich einfach so herstellen, dass man erst die Kurve γ aus einem reellen Punkt P auf eine imaginäre Ebene π' projiziert, welche der Ebene π parallel ist, d.h. deren reelle Achse mit der

Digitized by Google

unendlich fernen reellen Geraden von π zusammenfällt. Diese Projektion γ_1 projiziert man nun wieder auf π zurück aus einem Punkt P', der in einer durch P gehenden und zu π parallelen reellen Ebene π'' liegt. Die so erhaltenen neuen Kurven γ' sind Parallelverschiebungen von γ. Eine Kurve γ' hat einen reellen Punkt, wenn durch den zugehörigen Punkt P' der reelle Träger eines Punktes von γ_1 geht, und eine reelle Tangente, wenn durch P' eine reelle Ebene geht, welche eine Tangente von γ_1 enthält.

Eine Änderung in δ kann nur so vor sich gehen, dass mehrere reelle Punkte zusammenfallen und dann als solche verschwinden — oder auftreten. Man kann sich aber mit dem Fall begnügen, dass nur zwei reelle Punkte von γ' zusammenfallen und zu einer reellen Tangente Anlass geben.

Lagen von P', wo die zugehörige Kurve γ' neue reelle singuläre Punkte höherer Ordnung bekommt, können nur diskret vorkommen, und man kann P' so von einer Anfangslage ins Unendliche fortbewegen, dass dabei die genannten speziellen Stellungen nicht eingenommen werden.

Es sei nun

$$y = ax^2 + \dots . \qquad (a \text{ komplex}) \tag{1}$$

die Gleichung einer Kurve γ' in einer Lage, wo sie einen reellen Punkt O und eine reelle Tangente $y = 0$ hat. Wir können die Richtung der y-Achse als eine beliebige *nur nicht mit der Richtung der Tangente zusammenfallende* Richtung betrachten. Durch eine Parallelverschiebung εi in der Richtung der y-Achse erhält man die Gleichung

$$y + \varepsilon i = ax^2 + \dots . \qquad (\varepsilon \text{ reell}). \tag{2}$$

Wenn nun ε hinreichend klein gewählt wird, dann kann man, weil es sich nur darum handelt, diejenigen neu auftretenden reellen Punkte zu finden, welche in unmittelbarer Nähe von O liegen, sich damit begnügen, nur das erste Glied in (2) zu betrachten.

Aus

$$y + \varepsilon i = ax^2 \text{ und } y - \varepsilon i = \bar{a}x^2$$

erhält man

$$y = \frac{a + \bar{a}}{a - \bar{a}} \varepsilon i,$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{2\varepsilon i}{a - \bar{a}}}.$$

Digitized by Google

Der eine Wert von y ist immer reell, die zwei Werte von x sind reell, wenn $\frac{\varepsilon i}{a - \bar{a}}$ positiv ist.

Um nun die Zahl der reellen Tangenten der verschobenen Kurve zu finden, welche in der Nähe von $y = 0$ liegen, wird man die Gleichung (1) in Linienkoordinaten schreiben. Als diese wird man hier solche u und v wählen, dass

$$Y = uX + v$$

die Gleichung einer Geraden wird, denn dann wird die Verschiebung schon effektuiert, wenn man $v + \varepsilon i$ statt v schreibt.

Die Gleichung von (1) in diesen Koordinaten ist, wie sofort zu sehen,

$$u^2 = -2av.$$

Die Gleichung der verschobenen Kurve wird

$$u^2 = -2a(v + \varepsilon i),$$

und diese mit

$$u^2 = -2\bar{a}(v - \varepsilon i)$$

verbunden, gibt

$$v = \frac{a + \bar{a}}{\bar{a} - a}\varepsilon i,$$

$$u = \pm\sqrt{\frac{4a\bar{a}}{a - \bar{a}}\varepsilon i}.$$

Hier ist v immer reell, zwei Werte von u sind reell, wenn $\frac{\varepsilon i}{a - \bar{a}}$ positiv ist.

Durch die Verschiebung treten also gleichzeitig entweder zwei neue reelle Punkte und zwei neue reelle Tangenten auf, oder auch keines von beiden. Die Differenz $\delta - \tau$ bleibt also unverändert.

Um nun den Wert der Differenz zu finden, denke man sich P in einem nicht der Kurve γ_1 angehörigen Punkt P_0 der reellen Achse u von π'. Durch P_0 gehen n zusammenfallende Träger von Punkten in γ_1, nämlich die in u zusammenfallenden Träger der Schnittpunkte von γ_1 mit u (man kann offenbar diese alle als imaginär annehmen). Durch P_0 gehen gleichzeitig k reelle γ_1 berührende Ebenen, nämlich die Ebenen, welche die aus P_0 an γ_1 gehenden Tangenten enthalten. Diese Zahlen müssen auch

Digitized by Google

bestehen bleiben, wenn P (im projektiven Sinne) hinreichend nahe an P_0 gewählt wird. Man hat also:

$$\delta - \tau = n - k.$$

Wir gehen nun zu einer *reellen* Kurve über, geben derselben eine Verschiebung wie oben und suchen die reellen Punkte und Tangenten, welche in der verschobenen imaginären Kurve auftreten. Ein gewöhnlicher reeller Punkt mit reeller Tangente gibt offenbar nicht zu reellen Punkten und Tangenten Anlass. Dies muss dann auch für einen Doppelpunkt mit reellen Tangenten gelten. Denken wir uns nun einen isolierten Punkt O. Die Näherungskurve in der Nähe von O ist dann

(3) $$y^2 + ax^2 = 0 \qquad (a \text{ reell und positiv}).$$

Hier hat die verschobene Kurve

$$(y + \varepsilon i)^2 + ax^2 = 0,$$

wie man sogleich sieht, die zwei reellen Punkte $\left(\pm\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{a}}, 0\right)$. Dagegen treten keine neuen reellen Tangenten auf, so dass hier

$$\delta - \tau = 2.$$

Hat die Kurve in O eine Spitze, dann hat man als Näherungskurve:

$$y^2 + ax^3 = 0 \qquad (a \text{ reell}).$$

Aus

$$(y + \varepsilon i)^2 = -ax^3 = (y - \varepsilon i)^2$$

sieht man, dass nur ein reeller Punkt auftreten wird, nämlich $\left(\sqrt[3]{\frac{\varepsilon^2}{a}}, 0\right)$.

In den benutzten Linienkoordinaten wird (3):

$$u^3 + \frac{27}{4} av = 0.$$

Die Methode zeigt sogleich, dass hier keine reellen Tangenten auftreten.

Man hat also die Kleinsche Relation:

$$2d'' + r' - (2l'' + w') = n - k.$$

Die Methode gibt auch die wertvolle Erweiterung des Herrn Schuh:

Digitized by Google

Wir erzetzen in der Nähe von O einen superlinearen Zweig der Kurve durch die Näherungskurve:

$$y = ax^{\frac{s+t}{t}} \qquad (a \text{ reell}).$$

Aus

$$(y + \varepsilon i)^t = a^t x^{s+t} = (y - \varepsilon i)^t$$

erhält man

$$\left(\frac{y + \varepsilon i}{y - \varepsilon i}\right)^t = 1 = \frac{\cos 2p\pi + i \sin 2p\pi}{\cos 2p\pi - i \sin 2p\pi},$$

also

$$y = \varepsilon \cos \frac{2p\pi}{t}, \quad p = 1, 2, \ldots, t - 1.$$

Die entsprechenden Werte von x findet man aus

$$x^{s+t} = \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^t \left(\cos \frac{2p\pi}{t} + i\right)^t = \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^t \frac{1}{\left(\sin \frac{2p\pi}{t}\right)^t}.$$

Wenn nun $s + t$ unpaar ist, dann entspricht jedem Wert von y ein reeller Wert von x. Wenn aber $s + t$ paar ist — also s und t beide unpaar — dann kann man, sowohl wenn $\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^t$ positiv, wie wenn es negativ ist, nur $\frac{t-1}{2}$ Werte von p benutzen, so dass x reell wird. Man hat also als die Zahl der reellen Punkte, welche in der Nähe von O auftreten: $\delta_1 = t - 1$.

Schreibt man ferner die obige Punktgleichung in die früher gebrauchten Linienkoordinaten um, so erhält man

$$v^s = Bu^{s+t} \qquad (B \text{ reell}).$$

Die Zahl der auftretenden reellen Tangenten ist also $\tau_1 = s - 1$. Summiert man über die ganze Kurve, wobei nur die singulären Punkte einen Beitrag liefern, hat man

$$\Sigma t - \Sigma s = n - k.$$

Ich füge noch die folgenden Bemerkungen hinzu. Wie Herr Schuh bemerkt hat, braucht man nicht die gegebene Kurve reell zu nehmen. Auch wenn im obigen letztgenannten Fall a komplex genommen wird, geben dieselben Schlüsse mit geringen Änderungen dasselbe Resultat.

Endlich kann man auch sagen, dass die Kleinsche Relation,

Digitized by Google

ihrer eigentlichen Natur nach, auch für nicht algebraische aber analytische Kurven ihre Richtigkeit behält, obgleich es allem Anschein nach nicht möglich sein wird, irgend eine Anwendung einer solchen Erweiterung zu finden. Die Rechenentwickelungen kann man wohl öfters aufstellen, aber jedenfalls werden n und k für nicht algebraische Kurven unendlich.

---

[1]) Math. Ann. Bd. 10, S. 199, (1876).
[2]) Amsterd. Wet. Versl. (2) 12, S. 845, (1904).
[3]) Palermo Rend. Bd. 42. S. 266, (1917).
[4]) Math. Ann. Bd. 7, S. 410 ff.
[5]) Math. Ann. Bd. 16, S. 388, (1880).
[6]) Bull. Soc. Math. 6, S. 84, (1877).
[7]) Math. Ann. Bd. 61, S. 77, (1905).

Digitized by Google

UEBER MARKOFF'S LEMMA

VON

ALF GULDBERG

Es sei eine zufällige Variable x gegeben, welche n verschiedene Werte $x_1, x_2, \ldots x_n$ annehmen kann; die Gesamtheit der Werte $x_1, x_2, \ldots x_n$ und der ihnen zugeordneten Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots p_n$, $\sum_1^n p_l = 1$, sei das Verteilungsgesetz von x genannt.

Der Mittelwert von x ist

$$M = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n.$$

Markoff's Lemma ist bekanntlich:

Ist x eine zufällige Variable, die nur positive Werte annehmen kann, und t eine beliebige über 1 liegende Zahl, so besteht die Wahrscheinlichkeit P grösser als $1 - \frac{1}{t}$ dafür, dass x das t-fache des Mittelwertes M nicht überschreitet.

Tschebycheff's bekannte Ungleichung wird direkt aus Markoff's Lemma abgeleitet.

Viele interessante Versuche sind gemacht, speziell um die Wahrscheinlichkeit der Tschebycheff'schen Ungleichung zu verschärfen.

Ich nenne *Medolaghi, Karl Pearson, Cantelli* und *Lurquin.*

Hat die zufällige Variable ein kontinuierliches Verteilungsgesetz mit einem Maximum, hat schon *Gauss* eine schärfere Ungleichung gefunden, ein Resultat, das von *Faber* erweitert ist. *Meidell* hat durch andere Betrachtungen das Resultat von *Gauss* wiedergefunden und erweitert.

Im Folgenden erlaube ich mir, eine einfache Bemerkung über Markoff's Lemma zu machen.

Wir haben:

Digitized by Google

$$M = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_i p_i}{p_1 + p_2 + \ldots + p_i} P + \frac{x_{i+1} p_{i+1} + \ldots + x_n p_n}{p_{i+1} + p_{i+2} + \ldots + p_n}(1-P),$$

wo $P = p_1 + p_2 + \ldots + p_i, \quad 1 - P = p_{i+1} + \ldots + p_n.$

Setzen wir

$$M_1 = \frac{x_1 p_1 + \ldots + x_i p_i}{p_1 + p_2 + \ldots + p_i}, \quad M_2 = \frac{x_{i+1} p_{i+1} + \ldots + x_n p_n}{p_{i+1} + \ldots + p_n},$$

wo M_1 der relative Mittelwert von $x_1, \ldots x_i$, M_2 der relative Mittelwert von $x_{i+1}, \ldots x_n$ sind, so haben wir:

$$M = M_1 P + M_2 (1-P)$$

oder

$$P = \frac{M_2 - M}{M_2 - M_1} = \frac{\frac{M_2}{M} - 1}{\frac{M_2}{M} - \frac{M_1}{M}}. \tag{1}$$

Also:

Ist x eine zufällige Variable mit dem Verteilungsgesetze $(x_1, \ldots . x_n, p_1, \ldots . p_n)$, so besteht die Wahrscheinlichkeit $P = \frac{M_2 - M}{M_2 - M_1}$ dafür, dass x einen der Werte $x_1, x_2, \ldots x_i$ annimmt, wo M der Mittelwert von x, M_1 der relative Mittelwert von $x_1, \ldots x_i$, M_2 der relative Mittelwert von $x_{i+1}, \ldots, x_n$ sind.

Die Wahrscheinlichkeit $Q = 1 - P$, dass die zufällige Variable x *nicht* die Werte $x_1, \ldots x_i$ annimmt, ist

$$Q = 1 - P = 1 - \frac{M_2 - M}{M_2 - M_1} = \frac{M - M_1}{M_2 - M_1}.$$

Wir haben also:

$$P \gtreqless Q,$$

je nachdem

$$M_2 - M \gtreqless M - M_1.$$

Wir haben also z. B. den Satz:

Es ist ebenso wahrscheinlich, wenn das arithmetische Mittel der relativen Mittelwerte von $x_1, \ldots x_i$ und von $x_{i+1}, \ldots, x_n$ gleich dem Mittelwert von x ist, dass die zufällige Variable x die Werte $x_1, \ldots x_i$ wie nicht diese Werte annimmt.

Nimmt die zufällige Variable x nur positive Werte an und

Digitized by Google

sind die Werte $x_1, \ldots x_i$ gleich oder kleiner als $t \cdot M$ $(t > 1)$ und die Werte $x_{i+1}, \ldots x_n$ grösser als $t \cdot M$, erhalten wir aus (1) Markoff's Lemma, wenn wir die zwei Verhältnisse $\frac{M_2}{M}$ und $\frac{M_1}{M}$ durch ihre *unteren* Grenzen t und 0 ersetzen.

Je genauer die 2 Verhältnisse $\frac{M_2}{M}$ und $\frac{M_1}{M}$ sich abschätzen lassen, desto schärfer ist natürlich die Bestimmung der gesuchten Wahrscheinlichkeit.

Liegen die Verhältnisse der zufälligen Variablen x wie bei Markoff's Lemma und kennen wir das Verhältnis — k — zwischen dem kleinsten Wert von x und dem Mittelwert M, so können wir in (1) die 2 Verhältnisse $\frac{M_2}{M}$ und $\frac{M_1}{M}$ durch die zwei unteren Grenzen t und k ersetzen und erhalten:

$$P > \frac{t-1}{t-k},$$

während Markoff's Lemma gibt:

$$P > \frac{t-1}{t}.$$

Setzen wir z. B. $t = \frac{5}{4}$, gibt Markoff:

$$P > \frac{1}{5}.$$

Ist z. B. $k = \frac{1}{2}$, gibt Formel (1):

$$P > \frac{1}{3}.$$

Kennen wir andererseits das Verhältnis — K — zwischen dem grössten Wert von x und dem Mittelwert M, so können wir 2 obere Grenzen der 2 Verhältnisse $\frac{M_2}{M}$ und $\frac{M_1}{M}$ angeben, nämlich $\frac{M_2}{M} < K$, $\frac{M_1}{M} < t$ $(t < 1)$. Die Formel (1) gibt dann die Wahrscheinlichkeit

$$P < \frac{K-1}{K-t}$$

dafür, dass die Variable $x \leqq t \cdot M$ $(t < 1)$.

Digitized by Google

Karl Pearson schreibt: »It is however conceivable that more ingenious application of Tschebycheff's idea may lead to a limit more close to the actual value of the probability«.

Mir scheint, dass eine Verschärfung der gesuchten Wahrscheinlichkeit nur bei *Voraussetzungen* in Betreff des Verteilungsgesetzes der Variablen x erhalten werden kann.

Digitized by Google

DIE NICHT-EUDOXISCHE MATHEMATIK

VON

J. HJELMSLEV

In der altgriechischen Geometrie findet man zwei verschiedene Entwicklungslinien. Die erste fängt mit Pythagoras an und kann durch den Zeuthenschen Ausdruck »die geometrische Algebra« gekennzeichnet werden. Die zweite wird durch die Eudoxische Proportionenlehre und Exhaustionsmethode gegründet und gipfelt in den Archimedischen Integrationen.

Die geometrische Algebra arbeitet mit Strecken und Flächen als allgemeinen Grössensymbolen. Die Begriffe der Gleichheit, Addition und Subtraktion, grösser und kleiner, waren durch die Grössenaxiome festgelegt. An die Stelle der Multiplikation von Zahlen tritt die allgemeinere Operation: die Bildung eines Rechtecks aus gegebenen Strecken als Seiten. Auf dieser Grundlage wurden die einfachsten algebraischen Rechenregeln aufgestellt (Euklid II). Und mit Hülfe der hierdurch geschaffenen Grössenlehre und Algebra wurde der pythagoreische Lehrsatz, die Bestimmung der mittleren Proportionalen und des goldenen Schnittes hergeleitet. Die Methode wurde so weit geführt, dass die Lösungen der speziellen Gleichungen zweiten Grades

$$x^2 \pm ax = b^2$$

erzielt wurden.

Weiter gelangte man aber auf diesem Wege nicht. Produkte mit mehreren Faktoren waren nicht zugänglich. Eine allgemeine Lehre von Verhältnissen hatte man nicht. Eine allgemeine Ähnlichkeitslehre auch nicht.

Die weitere Entwicklung erfolgte erst auf Grund der Proportionenlehre des *Eudoxos*. Diese Proportionenlehre ist im V.

Digitized by Google

Buche der Elemente dargestellt, als Vorbereitung zum VI. Buche, wo die allgemeine Lehre von der Ähnlichkeit sowie die Auflösung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades behandelt werden. Um von einem Verhältnis zweier Grössen reden zu können, setzt Eudoxos voraus, *dass die eine durch Vervielfältigung die andere übertreffen kann* (Euklid V, Def. 4). Diese Voraussetzung ist heutzutage als »*Axiom des Archimedes*« bezeichnet worden. Sie ist aber tatsächlich von *Eudoxos* etwa 150 Jahre vor *Archimedes* aufgestellt worden. Das Axiom muss also, wie schon Zeuthen mehrmals hervorgehoben hat, als *Eudoxisches Axiom*, und nicht als Archimedisches Axiom bezeichnet werden.

Die betreffende Voraussetzung ist für die Eudoxische Proportionenlehre von grundlegender Bedeutung. Die Gleichheit zweier Verhältnisse wird folgendermassen definiert: Grössen *a, b, c, d* sind in einerlei Verhältnis, wenn bei Vergleichung eines jeden Gleichvielfachen von *a* und *c* mit einem jeden Gleichvielfachen von *b* und *d* es sich jedesmal findet, dass, wenn das Vielfache von *a* grösser oder gleich oder kleiner als das Vielfache von *b*, alsdann auch das Vielfache von *c* grösser oder gleich oder kleiner als das Vielfache von *d* ist. Auf Grund dieser Definition entsteht nun ein sehr allgemeines mathematisches Hilfsmittel. Durch sogenannte Zusammensetzung von Verhältnissen wurde eine erweiterte Produktauffassung geschaffen. Die allgemeine Ähnlichkeitslehre wurde begründet. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades wurde gelöst. Die Exhaustionsmethode wurde ausgebildet.

Indessen zeigt sich, dass die neue Methode sich als so umfassend erweist, dass sie auf die Behandlung der alten schon gelösten Aufgaben zurückgreift. Bei Euklid findet sich so die mittlere Proportionale und der goldene Schnitt zweimal behandelt, einmal durch die Methoden der geometrischen Algebra, ein andermal durch die Eudoxischen Hilfsmittel.

Es entsteht die Frage, wie es eigentlich mit den beiden Methoden steht. Wäre es möglich gewesen, die geometrische Algebra weiter zu führen, ohne das etwas fremdartige Eudoxische Axiom aufzunehmen? Die Antwort ist bejahend. Man braucht nur eine andere Definition der Proportionalität einzuführen, nämlich die folgende: Grössen *a, b, c, d* sind in einerlei Verhältnis, wenn das Rechteck von *a* und *d* und das Rechteck von *b* und *c* einander gleich sind. Unter Zugrundelegung dieser Definition

Digitized by Google

und unter Anwendung des Satzes über Ergänzungsparallelogramme (Euklid I, 43) lassen sich alle Sätze der Eudoxischen Proportionenlehre (Euklid V) in einfachster Weise ableiten. Dass die Proportionalität durch die neue Definition nur für Strecken Bedeutung hat, ist unwesentlich. (Den Satz VI, 1 kann man durch den folgenden Satz ersetzen: Zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die Höhen).

Es wäre also tatsächlich möglich, durch geringfügige Änderungen die 6 Bücher Euklids in eine nicht - Eudoxische Geometrie umzugestalten.

Die Eudoxische Definition der Proportionen könnte dann nachher auf Grund des Eudoxischen Axioms als beweisbarer Satz wieder aufgenommen werden. Und dieser Satz würde dann mit dem Exhaustionsprinzip zusammen die Grundlage der Integrationslehre bilden. Bei der Ausführung seiner Integrationen hebt Archimedes das Eudoxische Axiom (»Lemma«) als wesentliche Grundlage sehr stark hervor. Und den eigentlichen Grund hierfür glauben wir in dem Umstande zu finden, dass dieses Axiom durch jede neue Anwendung tatsächlich einen neuen Inhalt fordert, indem die Existenz der jedesmal zu bestimmenden Grösse gerade durch die diesbezügliche Anwendung des Axioms bedingt wird. In der Einleitung seiner Schrift über die Quadratur der Parabel drückt Archimedes das Lemma in folgender Form aus:

»Wenn zwei Flächenräume ungleich sind, so ist es möglich, den Unterschied, um welchen der kleinere von dem grösseren übertroffen wird, so oft zu sich selbst zu setzen, dass dadurch jeder endliche Flächenraum übertroffen wird«. Mit grosser Vorsicht und Ängstlichkeit fügt er hinzu: »Auch die früheren Geometer haben sich dieses Lemmas bedient; dass nämlich Kreise im quadratischen Verhältnisse ihrer Durchmesser zu einander stehen u. s. w., ist mit seiner Hülfe dargetan worden. Nun ist aber jeder der angeführten Lehrsätze keineswegs minder annehmbar befunden, als solche, die ohne Zuziehung jenes Lemmas dargetan sind, und somit hat dasjenige, was ich jetzt darlege, dieselbe Annehmbarkeit für sich«.

Archimedes hat durch diese Ausführlichkeit dargelegt, dass er sein Lemma als besondere Postulatgrundlage bei jeder seiner Flächenberechnungen betrachtet. Dies tritt noch deutlicher hervor in seiner Schrift über die Kugel und den Zylinder, wo das Lemma im Postulat 5 als grundlegende Eigenschaft von Bogen-

Digitized by Google

längen und krummen Oberflächen ausgesprochen wird. Das »Archimedische Axiom« ist somit viel weiter gehend als das ursprüngliche »Eudoxische Axiom«. Est ist nicht als blosse Wiederholung des Eudoxischen Grössenaxioms aufzufassen, sondern vielmehr als ein Teil der Definition der krummen Längen und Flächen.

Wie wir es hier geschildert haben, könnte man die altgriechische Mathematik in zwei wohl gesonderte Teile, die nicht-Eudoxische und die Eudoxische Mathematik, trennen.

Descartes steht in seiner Geometrie unmittelbar auf dem Boden der Eudoxischen Proportionenlehre. Aber der mächtige Fortschritt, welcher durch die Geometrie von Descartes vollzogen wurde, ist in Wirklichkeit von Eudoxos unabhängig. Die Geometrie von Descartes würde ebenso natürlich als Fortsetzung der oben geschilderten nicht - Eudoxischen Geometrie hervortreten können. Die Einführung der Einheit und die Einführung der algebraischen Buchstabensymbole statt der geometrischen Verhältnisse, der algebraischen Rechnungen statt der geometrischen Algebra, alles ist von dem Eudoxischen Axiom unabhängig. Die Lehre von Descartes ist ihrem Wesen nach eine nicht-Eudoxische Mathematik.

Auch die heutige Algebra muss zur nicht - Eudoxischen Mathematik gerechnet werden, in dem Sinne, dass die Buchstaben nicht notwendig Zahlen bezeichnen. Die algebraische Invariantentheorie ist z. B. vom Zahlenkontinuum unabhängig und lässt sich ohne das Eudoxische Axiom begründen.

Auch die moderne Mathematik zeigt uns also sowohl eine nicht-Eudoxische wie eine Eudoxische Richtung. Die Eudoxische Richtung ist aber bei weitem die vorherrschende. Für die moderne Analysis stehen der Grenzbegriff und die Konvergenzprozesse im Vordergrund und scheinen alles zu beherrschen. Bei vielen Untersuchungen hat es sich aber von grundsätzlicher und weittragender Bedeutung erwiesen, wenn man im Stande war, sogenannte formale Rechnungen auszuführen und ihre Resultate zu verwerten, z. B. in der Lehre von den asymptotischen

Digitized by Google

Reihen, und in vielen Fällen wäre es wohl möglich zu zeigen, dass der Grenzbegriff und die Konvergenz nur nebensächliche Bedeutung haben.

In welchem Umfange die Analysis in eine nicht - Eudoxische Form gebracht werden könnte, lässt sich natürlich nicht leicht entscheiden. Im folgenden geben wir ein Beispiel ziemlich umfangreicher Untersuchungen, welche auf dem Boden der Differentialrechnung aufgewachsen sind, und deren Resultate sich schliesslich als von dem Konvergenzbegriff unabhängig erweisen werden.

Es lässt sich eine *Algebra der Potenzreihen* aufstellen, welche unabhängig von der Konvergenzfrage ist. Wie man die elementaren Rechnungsarten, Addition, Subtraktion, Multiplikation definieren kann, ist wohlbekannt (z. B. aus der Lehre von den asymptotischen Reihen und aus den neueren axiomatischen Untersuchungen über sogenannte »nicht-Archimedische« Geometrien).

Eine Potenzreihe der Form

$$a(t) = a_1 t + \frac{a_2}{1.2} t^2 + \frac{a_3}{1.2.3} t^3 + \ldots, \quad a_1 \neq 0,$$

lässt sich mittels der Substitution

$$t \to \alpha_1 t + \frac{\alpha_2}{1.2} t^2 + \frac{\alpha_3}{1.2.3} t^3 + \ldots, \quad \alpha_1 \neq 0,$$

in eine andere

$$a'(t) = a_1' t + \frac{a_2'}{1.2} t^2 + \frac{a_3'}{1.2.3} t^3 + \ldots$$

überführen. Hier gibt es keine eigentlichen Invarianten, d. h. Funktionen Π der Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots$, welche bei der Substitution ungeändert bleiben derart, dass

$$\Pi(a_1', a_2', \ldots) = \Pi(a_1, a_2, \ldots).$$

Für zwei Potenzreihen $a(t)$ und $b(t)$ gibt es aber *Simultaninvarianten.*

Die einfachste ist $\frac{a_1}{b_1}$. Eine andere ist

$$\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_1^3}.$$

Digitized by Google

Wir kennen alle diese Invarianten aus der Kurvenlehre. Sie existieren aber für ganz beliebige Potenzreihen, auch wenn sie keine Kurve (im gewöhnlichen Sinne) definieren. Wir können die Vektorbezeichnung einführen, indem wir von Potenzreihen

$$a(t) = a_1 t + \frac{a_2}{1.2} t^2 + \frac{a_3}{1.2.3} t^3 + \dots.$$

reden, wo $a_1, a_2, a_3, \dots$ Vektoren (vorläufig im zwei-dimensionalen Raume) bezeichnen. Die Invarianten lassen sich dann in Vektorform ausdrücken, z. B.

$$\frac{[a_1 a_2]}{(a_1^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wo $[a_1 a_2]$ das Vektorprodukt von a_1 und a_2 bezeichnet, a_1^2 das skalare Quadrat von a_1. Und alle diese Vektorinvarianten werden dann auch eine Bedeutung haben, wenn $a_1, a_2, a_3, \dots$ Vektoren in einem höheren Raume (mit beliebig vielen, auch unendlich vielen, Dimensionen) bezeichnen. Wir erhalten somit eine Invariantentheorie, welche die ganze Kurvenlehre als Spezialfall umfasst und unabhängig von der Dimensionenzahl des Raumes ist.

Man kann weiter gehen. Potenzreihen von zwei (oder beliebig vielen) Buchstabenzeichen können auch behandelt werden, z. B.

$$a(t_1, t_2) = a_1 t_1 + a_2 t_2 + \frac{1}{1.2}(a_{11} t_1^2 + 2a_{12} t_1 t_2 + a_{22} t_2^2) + \dots,$$

wo $a_1, a_2, a_{11}, a_{12}, a_{22}, \dots$ Vektoren (im dreidimensionalen oder einem höheren Raum) bezeichnen.

Es gibt dann auch hier ein Invariantensystem für beliebige Transformationen der Form

$$(t_1, t_2) \to (\alpha(t_1, t_2),\ \beta(t_1, t_2)),$$

wo $\alpha(t_1, t_2)$ und $\beta(t_1, t_2)$ Potenzreihen bezeichnen, deren Koeffizienten α und β Skalargrössen sind. Die hier in Betracht kommenden Invarianten kennen wir aus der gewöhnlichen Differentialgeometrie. Sie bestehen aber ganz unabhängig von dieser. Die Begründung der allgemeinen Invariantentheorie in der Algebra der unendlichen Potenzreihen erfolgt unabhängig von Konvergenzprozessen und Differentialrechnung. Von Kovarianten kann man natürlich auch reden. Den ganzen Invariantenkalkül der Riemannschen Geometrie (Tensorrechnung, kovariante Diffe-

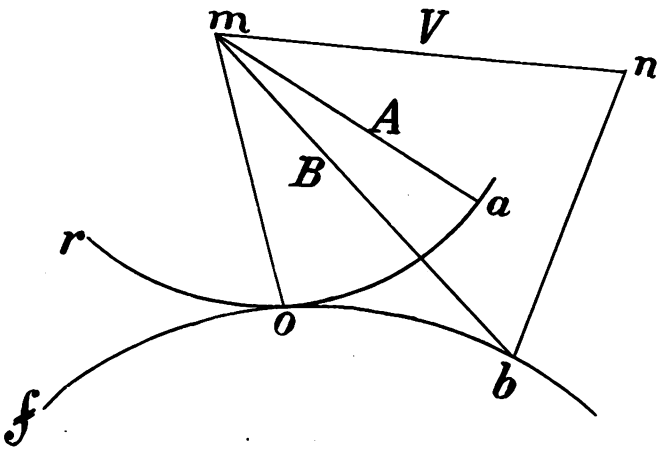
Digitized by Google

rentiationen) können wir natürlich aufnehmen und durch rein formale Algebra der Potenzreihen begründen (indem wir auch rein formale Differentiationen und Integrationen der Potenzreihen einführen).

Tatsächlich führt diese allgemeine Theorie mit einem Schlage bedeutend weiter als die gewöhnliche Differentialgeometrie, auch für diese selbst. Die alten Resultate (welche mit Hülfe der Differentialrechnung gewonnen sind) lassen sich sofort auf allgemeinere Kurven- und Flächengebilde überführen. Die Existenz einer infinitesimalen Reihenentwicklung einer Kurve oder Fläche von einem Punkt aus kann nämlich bestehen ohne die Existenz von höheren Differentialquotienten. Die geometrische Tragweite der Algebra der Potenzreihen ist deshalb schon grösser als diejenige der gewöhnlichen Untersuchungen der Differentialgeometrie. Die Differentialrechnung wird eigentlich ganz ausser Spiel gesetzt, und ihre Rolle wird jedenfalls nur eine rein formale.

Ein nähere Entwicklung dieser Gedanken denke ich bald veröffentlichen zu können. Zum Schluss gebe ich hier noch ein elementares Beispiel aus der kinematischen Geometrie.

Bei dem Rollen einer Kurve r auf einer anderen Kurve f beschreibt der Punkt m eine Rollkurve. In der Figur ist o der augen-



blickliche Berührungspunkt der Kurven r und f, a und b einander entsprechende Punkte derart, dass $\widehat{oa} = \widehat{ob}$. Wenn a bei der Roll-

Digitized by Google

bewegung in b übergeht, kommt der Punkt m in die neue Lage n, derart bestimmt, dass die Strecken ma und nb gleich gross sind und mit den Tangenten in a und b gleiche Winkel bilden. Alles dies soll nun im obengenannten Sinne verallgemeinert werden:

Wir denken uns zwei Kurvenelemente, den beiden Bögen oa und ob der Kurven r und f entsprechend, deren Vektorentwicklungen vom Punkte m aus durch die folgenden Reihen gegeben sind:

$$A = a_0 + a_1 t + \frac{a_2}{1.2} t^2 + \frac{a_3}{1.2.3} t^3 + \ldots.$$

$$B = b_0 + b_1 t + \frac{b_2}{1.2} t^2 + \frac{b_3}{1.2.3} t^3 + \ldots.$$

Die Bogenlänge des Elementes A wird durch die skalare Entwicklung

$$\alpha(t) = \alpha_1 t + \frac{\alpha_2}{1.2} t^2 + \ldots.$$

bestimmt, derart dass

$$A'^2 = (\alpha'(t))^2,$$

ausführlich geschrieben:

$$\left(a_1 + a_2 t + \frac{a_3}{1.2} t^2 + \ldots.\right)^2 = \left(\alpha_1 + \alpha_2 t + \frac{\alpha_3}{1.2} t^2 + \ldots.\right)^2.$$

Sind die Vektoren $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bekannt, lassen sich hieraus die Skalare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ berechnen.

Die Bogenelemente A und B haben gleiche Längen, also wird

$$A'^2 = B'^2. \tag{1}$$

Wir wollen nun die Vektorentwicklung, $\vec{mn} = V$, der Rollkurve bestimmen.

Die Vektoren $\vec{ma} = A$ und $\vec{nb}$ haben dieselbe Länge und bilden gleiche Winkel mit den Tangenten in a und b. Diese Eigenschaften werden durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt:

$$A^2 = (B - V)^2 \tag{2}$$

$$A \frac{A'}{\sqrt{A'^2}} = (B - V) \frac{B'}{\sqrt{B'^2}} \text{ oder } AA' = (B - V)B'. \tag{3}$$

Aus diesen Gleichungen findet man den Vektor V, und die

Digitized by Google

Entwicklung der Rollkurve ist hierdurch bestimmt. Alle Eigenschaften der Rollkurve sind in diesen Gleichungen enthalten. Aus (2) und (3) findet man z. B.

$$(B - V)\, V' = 0,$$

d. h. die Normale der Rollkurve geht durch den augenblicklichen Berührungspunkt der Polkurven hindurch.

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR LA VALEUR PRINCIPALE DE CAUCHY

PAR

M. RIESZ

L'auteur a donné un résumé sommaire dans les Comptes rendus, t. 178, p. 1464, 1924. Un mémoire sur le même sujet paraîtra dans la Mathematische Zeitschrift.

Digitized by Google

Digitized by Google

ON THE BEHAVIOUR OF ATOMS IN AN ELECTROMAGNETIC WAVE FIELD

BY

H. A. KRAMERS

§ 1. *Introduction.*

As well known, the properties of the atoms cannot be accounted for on the basis of the classical theory of electrons. Still they exhibit in many respects a great similarity with the properties which, on the classical theory, systems consisting of small electrically charged particles would possess. One of the main problems in the modern theory of atoms is therefore to find to what extent and in what manner the conceptions and the laws of classical electrodynamics can be used in order to establish a description of the actual properties of atoms. Now, an outstanding non-classical feature of these properties is a certain element of discontinuity which finds an appropriate expression in Bohr's postulate of the existence of discrete *stationary states* of an atom, and in the application of the ideas of Planck's *quantum-theory* to the closer description of the laws governing these states and the *transitions* between them. Thus many atomic properties may be expressed by laws which roughly spoken are a translation into a »discontinuous language« of laws which, being derived by means of classical electrodynamics, are formulated in a »continuous language«. The object of this lecture is to show in the case of a special problem of physical interest in what way such a translation can be effected, and it will be seen, how a characteristic feature of the mathematical formulation consists in the substistution of the »differentials« occurring in the formulæ of the classical theory, by finite »differences«, referring to the discrete stationary states or the transitions between them.

§ 2. *The quantum theory of periodic systems.*

Consider an atomic system consisting of one or more electrified particles, and having the property that its motion, when

Digitized by Google

calculated by means of classical mechanics, is always periodic, independent of the initial positions and velocities of the particles. Let T be the kinetic energy of the system and ω the frequency of the motion, *i.e.* the number of periods pro sec., and let the quantity J be defined by the time integral of $2T$ taken over one period:

$$J = \int_0^{1/\omega} 2\,T\,dt. \tag{1}$$

It is easily proved, *e.g.* by means of the theorem of least action, that the energy E of the system can be considered as a function of J alone, and that the following relation holds:

$$\frac{dE}{dJ} = \omega. \tag{2}$$

The Cartesian coordinates of the particles can, considered as a function of the time be developed in Fourier series of period $\frac{1}{\omega}$. The same will therefore hold for the components of the electrical moment of the system. If ξ is one of these components we will therefore have:

$$\xi = \sum_0^\infty{}^{\tau} C_\tau \cos(2\pi\tau\omega t + \gamma_\tau), \tag{3}$$

where the summation has to be extended over integer values of τ, and where the amplitudes C_τ and phase-constants γ_τ may be considered as functions of J. According to the classical electron theory of radiation, the periodically changing electrical moment (3) will give rise to the emission of a set of monochromatic electro-magnetic waves, of frequencies ω, 2ω, 3ω a.s.o. and of intensities proportional to the square of the amplitudes characterising the corresponding Fourier components of the electrical moment. Due to this radiation the energy of the system would continually decrease.

In the quantum theory of spectra, the behaviour of the periodic system under consideration is described in the following way. The system possesses a set of stationary states, which may be characterised by the integer values 0,1,2,3,..., which a »quantum number« n may take, and the energy E_n in the nth state is the same as the energy in a mechanical state of motion for which the following relation holds:

$$J = n\,h \tag{4}$$

where h is Planck's constant.

Digitized by Google

The emission of the spectrum of the atom is brought about by transitions of the atom from one state n' to another state n'' of lower energy; the waves corresponding to such a transition are monochromatic, the frequency $\nu_{n''}^{n'}$ being given by *Bohr's frequency relation:*

$$\nu_{n''}^{n'} = \frac{E_{n'} - E_{n''}}{h} \tag{5}$$

This relation can also be written in the following form.

$$\nu_{n''}^{n'} = (n' - n'') \frac{E_{n'} - E_{n''}}{hn' - hn''} = (n' - n'') \frac{\Delta E}{\Delta J} \tag{6}$$

where ΔE and ΔJ design the difference of the values of E and J in the two states involved in the transition.

When we compare the expression (6) with the expression for one of the frequencies which, on the classical theory, would be involved in the radiation from the system:

$$\nu = \tau \omega = \tau \frac{dE}{dJ} \tag{7}$$

where τ is an integer, we see at once that Bohr's frequency condition may be considered as the »translation« of a classical formula into a formula which takes account of the discontinuities of the quantum theory, the quotient of two differentials being replaced by the quotient of two differences, referring to a pair of stationary states.

If we suppose h to converge to zero, and if at the same time we keep $(n'-n'') = \tau$ and E constant, the formula (6) will in the limit be identical with (7). But even if h remains finite the value of ν expressed by (6) will still tend to coincide asymptotically with that given by (7) for $\tau = n'-n''$, if we go to the limit of very great values of n, i.e. if we consider transitions for which $n'-n''$ is small compared with the values of n' and n'' themselves. Bohr has postulated that this asymptotic coincidence of the results of the quantum theory with those of the classical theory not only is restricted to the frequencies of the spectral lines, but also to the intensities with which these lines appear and to their state of polarisation, and he considers the coincidence in question as evidence of a general law or feature, proper to the behaviour of atomic systems, which is called the

Digitized by Google

correspondence principle. In the terminology of this principle, the appearance of a spectral line originating from a transition of the n'^{th} to the n''^{th} state is said to »correspond« to the presence of the harmonic of frequency $(n'-n'')\,\omega$ in the motion, which the system would perform according to the classical electrodynamical laws.

As an example of the application of (4) of (5) and of the correspondence principle we may mention the quantum theory of the hydrogen spectrum. In the hydrogen atom the electron would, according to the classical theory, describe a closed Keplerian orbit round the nucleus as centre. The dependency between E and J is for this system expressed by:

$$E = -\frac{2\pi^2 e^4 m}{J^2} \tag{8}$$

where e and m represent the charge and mass of an electron. After the introduction of (4), the frequencies of the lines of the hydrogen spectrum are directly obtained by means of (5). The fact that lines are observed corresponding to all possible values of the difference $n'-n''$ is, according to the correspondence principle, connected with the circumstance, that in the Fourier resolution of a Keplerian motion harmonics occur corresponding to any integer value of τ.

The intensity with which a given spectral line appears is often expressed by means of a coefficient $a^{n'}_{n''}$ introduced by Einstein in 1917, which has such a value that $a^{n'}_{n''}\,dt$ denotes the probability that, in a time interval dt, an atom in the state n' shall spontaneously perform a transition to the state n''. If $\nu^{n'}_{n''}$ is the frequency of the corresponding spectral line, the mean energy emitted per second in the form of radiation of this frequency by an atom in the state n' will then be given by $a^{n'}_{n''}\,h\,\nu^{n'}_{n''}$.

At present the theory has not yet succeeded, however, in finding the exact mathematical expressions for the coefficients $a^{n'}_{n''}$, from a consideration of the behaviour of the atom according to the classical theory we can, however, derive expressions, which by the correspondence-principle allow to calculate these coefficients in the limit of high quantum numbers. If we, especially, consider a system of one degree of freedom in which

Digitized by Google

an electrical particle can perform oscillations along a straight line, the electrical moment can, on the classical theory, be represented by a formula of the type (3). According to the classical theory of radiation, the electromagnetic energy radiated pro sec. in the form of waves of frequency $\tau\,\omega$ will be given by $(2\pi\tau\omega)^4\, C_\tau^2/3\,c^3$, where c is the velocity of light. The asymptotical relations for frequency and intensity holding in the limit of high quantum numbers can then be expressed by:

$$\nu^{n'}_{n''} \sim (n' - n'')\,\omega, \tag{9}$$

$$a^{n'}_{n''}\, h\, \nu^{n'}_{n''} \sim \frac{(2\pi(n' - n'')\,\omega)^4\, C^2_{n'-n''}}{3\,c^3}. \tag{10}$$

It will be convenient for the following to introduce the conception of *virtual oscillator, i. e.* of an electrical dipole which harmonically oscillates with frequency $\nu^{n'}_{n''}$, and with such an amplitudee $A^{n'}_{n''}$ that the classical radiation from it would exactly correspond with the radiation of that frequency which in the mean can be ascribed to each atom in the initial state n'. These quantities $A^{n'}_{n''}$, which we will call the *characteristic amplitudes* of the transitions, will thus in the case of a linear oscillator be defined by

$$a^{n'}_{n''}\, h\, \nu^{n'}_{n''} = \frac{\left(2\pi\,\nu^{n'}_{n''}\right)^4 A^{n'\,2}_{n''}}{3\,c^3} \tag{11}$$

and the asymptotical relation (10) takes the form

$$A^{n'}_{n''} \sim C_{n'-n''}. \tag{12}$$

§ 3. *The action of monochromatic light on an atomic system.*

In this paragraph we proceed to the problem which forms the proper subject of our lecture, *viz.* the problem of the reaction of an atom when exposed to an electromagnetic wave field. For the sake of simplicity we will, just as in the end of the former paragraph, consider an atomic system consisting of an electrified particle which can perform oscillations along a straight line, and moreover we will assume that the light waves falling on the atom are monochromatic and linearly polarised, the electrical vector being parallel to the direction in which the particle moves. From the analysis of *optical phenomena* we know, that

Digitized by Google

under the influence of the light, the atom will become a secondary source of radiation; in the language of the classical theory of radiation it will act as a dipole which oscillates with the same frequency as that of the incident light. The amplitude of this oscillation will be proportional to the amplitude of the electrical vector of the incident light, and its phase will directly depend on the phase of this vector, *i.e.* the secondary radiation will be *coherent* with the primary radiation. If the electrical light-vector at the position of the atom is presented by

$$\mathfrak{E} = E \cos 2\pi\nu t \qquad (13)$$

the oscillating dipole»induced«in the atom can be represented by

$$\mathfrak{P} = P \cos(2\pi\nu t - \varphi). \qquad (14)$$

The ratio P/E and the phase difference φ are the determining factors for the *dispersion, absorption* and *scattering* of the incident light by a gas consisting of atoms of the kind described. In fact, if N be the number of atoms per ccm., the index of refraction n will be given by

$$n^2 - 1 = 4\pi N \frac{P \cos\varphi}{E}. \qquad (15)$$

The energy *absorbed* from the incident beam will be equal to $\pi\nu NPE \sin\varphi$ pro sec., corresponding to an effective absorbing cross section equal to $8\pi^2 \frac{\nu}{c} \frac{P \sin\varphi}{E}$ pro atom. The energy *scattered* by the atoms in all directions in the form of radiation of frequency ν will finally be equal to $\frac{N(2\pi\nu)^4 P^2}{3c^3}$ pro sec. If ν does not lie in the immediate neighbourhood of one of the absorption lines of the atoms, $\sin\varphi$ will be very small, and the problem of the reaction of the atom on the light will primarily consist in finding which function can represent the values of the scattering electrical moment P of the atom as a function of the frequency ν of the incident light; P being reckoned positive or negative according as the value of φ is very nearly equal to 0, or to π.

In order to establish the form of the function P, we will first investigate the influence which, on the classical theory, the light will have on the motion of the atomic system. Let the electrical

Digitized by Google

moment of the atom be ξ, and let us assume that in the undisturbed motion, ξ is represented by the series:

$$\xi_0 = R \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\tau} \frac{1}{2} C_\tau e^{2\pi i \tau \omega t}. \tag{16}$$

The symbol R means, that the real part has to be taken. The summation has to be extented over positive and negative integer values of τ, zero included. The amplitudes C's are in general complex quantities, satisfying the relation

$$C_{-\tau} = \overline{C}_\tau. \tag{17}$$

These amplitudes, as well as the frequency ω, may be considered as functions of the quantity J defined by (1). Then, writing

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 \tag{18}$$

we find, by means of the theory of perturbations, that when the atoms is exposed to the periodical field of force (13), and when second and higher powers of E are neglected, ξ_1 will be given by the double infinite series:

$$\xi_1 = R \frac{E}{4} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\tau_0} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\tau} \left\{ -(\tau - \tau_0) \frac{dC_\tau}{dJ} \frac{\overline{C}_{\tau-\tau_0}}{-(\tau-\tau_0)\omega + \nu} - \tau C_\tau \frac{d}{dJ}\left(\frac{\overline{C}_{\tau-\tau_0}}{-(\tau-\tau_0)\omega+\nu} \right) \right\} e^{2\pi i (\nu + \tau_0 \omega) t}. \tag{19}$$

From (19) we see that the light has induced in the atom not only a »forced vibration« of frequency ν, but also vibrations the frequencies of which are of the type $\nu + \tau_0 \omega$. Only in the case of a harmonic oscillator (all C's zero except $C_{\pm 1}$) these »compound« frequencies will not appear.

Consider first that part of (19), which corresponds to a dipole of frequency ν, and for which consequently $\tau_0 = 0$. Representing it by $\mathfrak{P}$, we can write it in the form

$$\mathfrak{P} = R \frac{E}{2} \sum_{1}^{\infty}{}_{\tau} \tau \frac{d}{dJ} \left(\frac{|C|^2 \tau \omega}{(\tau\omega)^2 - \nu^2} \right) e^{2\pi i \nu t}. \tag{20}$$

Now this expression can be transformed so as to refer to the actual properties of the atom, by replacing the differential coefficients in an adequate way by quotients of differentials. In the case of the formulæ (7) and (6) such a transformation was brought about by letting the differences on the right hand term refer to two stationary states, while the left hand term referred

Digitized by Google

to a transition between these two states. Such a thing is not possible here, however, since the expression for the scattering electrical momentum of the atom, which appears on the left hand side of (20), necessarily must represent a property of a given stationary state of the atom. In agreement with this, the differences appearing when transforming the right hand side will refer to two transitions; the stationary state in question being the final state for the one and the initial state for the other. In fact, the asymptotical relations (9) and (12) suggest directly that we must transform (20) in the following way:

$$\mathfrak{P}_n = \frac{E}{2h} \sum_1^\infty \tau \left[\frac{\left(A_n^{n+\tau}\right)^2 \nu_n^{n+\tau}}{\left(\nu_n^{n+\tau}\right)^2 - \nu^2} - \frac{\left(A_{n-\tau}^{n}\right)^2 \nu_{n-\tau}^{n}}{\left(\nu_{n-\tau}^{n}\right)^2 - \nu^2} \right] \cos 2\pi\nu t \qquad (21)$$

where the left member refers to the scattering momentum in the nth stationary state. There has been no question of a rigid deduction of (21) from (20), but there are several reasons which make it possible for us to believe that formula (21) is right. First of all, it is easily proved, that in agreement with the correspondence principle, the formulæ (21) and (20) become asymptotically identical in the limit of high quantum numbers. Further the formula (21) contains only quantities which are directly measurable by experiment, *viz.* the frequencies of the light which the atoms may radiate and the quantities A which govern the intensity of these radiations.

A peculiar consequence follows from the circumstance that there do not exist stationary states corresponding to all positive and negative values of n. If, for instance, only such states exist for which $n=0,1,2\ldots$, a great number of terms appearing in (21) have to be left out. Denoting by the index *abs* any quantity referring to transitions which the atom in a given state may perform by absorption of light to a state of greater energy, and by the index *em* a quantity referring to a transition to a state of less energy, (21) may also be given the form:

$$\mathfrak{P} = \frac{E}{2h} \left\{ \sum_{abs} \frac{A_{abs}^2 \nu_{abs}}{\nu_{abs}^2 - \nu^2} - \sum_{em} \frac{A_{em}^2 \nu_{em}}{\nu_{em}^2 - \nu^2} \right\} \cos 2\pi\nu t \qquad (22)$$

where the summations have to be extented to all the absorption and all the emission lines of the atom in the state under consideration.

Digitized by Google

In the special case where the atom is in its normal state, *viz.* the state of smallest energy, no emission of radiation is possible, and no terms exist belonging to the second summation inside the brackets. In other words the subtrahends appearing in the »differences« by which the classical differentials were replaced, disappear; a feature which illustrates very clearly the profound difference between the quantum theory of atoms and the classical theory of electrons. Formally, the formula thus obtained for the scattering momentum in the normal state of an atom, coincides with the classical formula for the scattering from an atomic system in which the particles can perform harmonic oscillations of frequencies ν_{abs} round their positions of equilibrium. It leads immediately to a dispersion formula of the Helmholtz-Ketteler type, which has been confirmed by experiments on dispersion in gases and vapours, not only in frequency regions far from the frequencies of the absorption lines which form singular points for the function $\mathfrak{P}$, but also in the neighbourhood of these lines, where $\mathfrak{P}$ assumes very large values giving rise to the so-called anomalous dispersion. In the immediate neighbourhood of an absorption line, formula (22) must be expected to fail. This is connected with the fact, that even the classical formula (19) only holds if ν is different from any of the natural frequencies $\tau\omega$ of the system, since in case of coincidence the change of the motion of the electron due to the external wave field would, due to resonance, no longer be small. The problem of the corrections to be applied to (22) in order to represent the scattering also inside the absorption lines has not yet found a satisfactory solution.

If the atom is in one of its higher states, also terms belonging to the second sum inside the brackets of (22) appear. In the neighbourhood of the frequency ν_{em} of an emission line, the atom will then give rise to an anomalous dispersion of similar kind as in the case of an absorption line, with the difference that the sign of $\mathfrak{P}$ is reversed. This socalled »negative dispersion« is closely connected with the prediction made by Einstein, that the atom for such a frequency will exhibit a »negative absorption«, *i.e.* light waves of this frequency, passing through a great number of atoms in the state under consideration, will increase in intensity.

Until now we have only considered those terms in the ex-

Digitized by Google

pression (19) which correspond to $\tau_0 = 0$, i.e. we have investigated that part of the classical scattering which has the same frequency as the incident light and is coherent with it, and we have established the analogon of those terms in the quantum theory. To the other terms in (19), there correspond, however, also well defined mathematical expressions in the quantum theory; these expressions mean that the atom, under the influence of the light, will not only scatter radiation of the same frequency, but also radiation of other frequencies, the intensity of which, however, is again proportional to the intensity of the incident light. The classical frequencies of these radiations being of the form $|\nu + \tau_0\omega|$, we are, from the correspondence principle, naturally led to expect that in the nth state of the atom these frequencies will be of the form $\left|\nu + \nu^n_{n-\tau_0}\right|$ or $\left|\nu + \nu^{n+\tau_0}_n\right|$, where ν^a_b should be put equal to $-\nu^b_a$ if b should be larger than a. It would lead us too far to give in detail the transformation of (19) which in these cases leads to an expression of the amplitudes of the scattering momentum of the atom, and the reader is referred to the second paper cited in the literature reference. We will only add a few remarks regarding the finite results.

If τ_0 is positive the scattered frequencies are of the type $\nu + \nu^n_{n-\tau_0}$ and their amplitudes will contain terms of the type

$$\frac{E}{4h} A^{n+\tau}_{n-\tau} A^{n+\tau}_n \left(\frac{1}{\nu^{n+\tau}_n - \nu} + \frac{1}{\nu^{n+\tau}_{n-\tau_0} + \nu}\right) \tag{23}$$

where τ represents some whole number. Besides these terms also other terms of similar structure appear. In order to obtain these expressions, it is necessary not only to replace the differential coefficients in (19) by the quotients of differences, but also to replace the factors which contain the amplitudes C in a non differentiated form by half the sum of two quantities referring to two definite transitions. It is interesting in this connection to remember that also in the mathematical theory of difference equations, one is lead from the very beginning not only to consider differences of the type $\frac{1}{\omega}[f(x+\omega) - f(x)]$, but also sums of the type $\frac{1}{2}[f(x+\omega) + f(x)]$ (Comp. N. E. Nørlund, Differenzenrechnung).

Digitized by Google

If τ_0 is negative, the scattered frequencies are partly of the type $\nu + \nu^n_{n-\tau_0} = \nu - \nu^n_{n-\tau_0}$, corresponding to values of τ_0 for which this expression is positive, partly of the type $\left|\nu + \nu^n_{n+\tau_0}\right| = \nu^n_{n+\tau_0} - \nu$, again corresponding to values of τ_0 for which the last expression is positive. In both cases the amplitudes are again expressed by sums of terms, the structure of each of which is similar to that of the expression (23).

The generalization of our considerations to systems of more degrees of freedom, the motion of which is not of a simply periodic, but of a so-called multiple periodic type, and the stationary states of which are determined by more than one quantum number, does not involve any difficulty, and no new features are brought to light by its results. An exception is formed, however, by systems for which the number of quantum numbers determining the stationary states is less than that of degrees of freedom. In the case of such systems, which often are called »degenerate«, and of which the undisturbed hydrogen atom forms an important example, it has not yet been possible to solve the problem of the amplitudes of the scattered radiation in a satisfactory way, the difficulty being mainly that of determining the character of the polarisation of the scattered rays.

The results of which I have tried to give you some idea in this lecture suggest the possibility of a theoretical treatment of atomic properties, in which from the outset all formula referring directly to the classical theory of electrons are banished, and in which only formulæ having a direct meaning in the sense of the quantum theory are allowed. Although it is uncertain on what lines such a program can be worked out and carried through, interesting and promising results have already been obtained in the papers (3) and (4) mentioned in the literature list, which contain an audacious attempt of developing a new »*quantum mechanics*«.

LITERATURE

1) *H. A. Kramers:* The quantum theory of dispersion, Nature *113*, 673, 1924; *114*, 310, 1924.

2) *H. A. Kramers* und *W. Heisenberg:* Über die Streuung von Strahlung durch Atome, Zs. für Phys. *31*, 601, 1925.

3) *M. Born:* Über Quantenmechanik, Zs. für Phys. *26*, 379, 1924.

4) *W. Heisenberg:* Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen, Zs. für Phys. *33*, 879, 1925.

Digitized by Google

Digitized by Google

Ved Kongressens **Besøg i Telefonhuset** fremsatte **Telefondirektør Johannsen** nedenstaaende Indledning til et Foredrag af Magister A. K. Erlang om Sandsynlighedsregningens Anvendelse i Telefondriften m. m.

Idet jeg paa Kjøbenhavns Telefon Aktieselskabs Vegne byder den høje Kongres Velkommen i disse noget mærkelige Omgivelser (Kabelkælderen), vil jeg kun pege paa, at der pulserer et mægtigt Liv gennem de 100,000 Traade i de Kabler, der omgiver Dem. De ingeniørvidenskabelige Problemer, der knytter sig til disse Traade, indeholder rige Anvendelser for en fremskreden Matematik.

Matematiken staar højt hævet over denne urene Jord, mere verdensfjern end nogen anden Videnskab, og dog behersker den alle Naturvidenskaberne lige fra Astronomien til Ingeniørvidenskaberne. Allerede det gamle Testamente siger, ifølge min Broder Arvelighedsforskeren: »*Og Gud skabte Verden efter Tal, Maal og Vægt.*«

Uden Matematiken vilde Naturvidenskaberne ikke have naaet deres høje Udvikling, Ingeniørvidenskaben og den moderne Teknik vilde ikke være kommet til at præge vor Tid i den Grad, som Tilfældet er. »*Uden Matematik ingen Ingeniører.*« Man hører undertiden, at Ingeniøruddannelsen navnlig her i Landet er for matematisk. Jeg mener ganske modsat, at Ingeniørerne burde lære meget mere Matematik, i alt Fald har jeg i min praktiske Gerning ofte savnet videregaaende matematiske Kundskaber. Jeg kunde have undværet meget om gamle klassiske Travere og ønsket mere om Anvendelsen af det mindste Arbejdes Princip, om Influenslinier og om Sandsynlighedsregning, Vektorregning og Differentialligninger.

Desværre hører Matematiken jo ikke til de populære Fag. Begyndere er tilbøjelige til at spørge, »*hvad kan det nytte*«, og efter min Mening spildes der altfor megen Tid paa de tyndbenede Begyndelsesgrunde, paa at »bevise« de simpleste Ting, som for den fremskredne Matematik maaske endda er ubeviselige. Jeg kunde fristes til at udbryde: »*Ak væ mit ene Knæ, den*

Digitized by Google

Indgang er for lang«. Kunde man ikke noget hurtigere komme frem til det virkeligt Betydende?

Lovbestemmelserne om Matematiklærernes Uddannelse kræver Indsigt i forskellige Bifag, Fysik og Kemi. Jeg mener nu, at Skridtet bør gøres videre, og at en Lærer i Matematik, navnlig da ved en teknisk Højskole, ikke burde staa fuldstændig fremmed over for Ingeniørfagene, som alligevel til syvende og sidst rummer den største og videstgaaende Anvendelse af Matematiken. Blot et ringe Kendskab til et Par Ingeniørfag vilde give en nyttig Viden om, hvad der kræves, og fortrinlige Eksempler og Anvisning paa Øvelsesopgaver. Min Grundtanke er, at Undervisningen bør lægges mere an paa Matematikens enorme Anvendelse i Livet end hidtil, »*non scholæ sed vitæ*«; dens Evne til at uddanne logisk Tænkning bliver derved ikke mindre.

Imidlertid maa jeg bede den høje Kongres bære over med denne lille Ønskeseddel fra Ingeniørvidenskaben til Matematiken. Jeg gentager, at for en fuldkommen Ingeniøruddannelse maa Matematikundervisningen staa paa et højt Standpunkt, men det vilde lette Opnaaelsen heraf, om Matematikerne vilde lukke Øjet op for Ingeniørvidenskabernes talrige interessante Opgaver, men jeg indrømmer, at det er behageligere at beskæftige sig med høje matematiske Problemer, end at mænge sig med denne skidne Jords indviklede Forhold.

Her i Telefonselskabet har vi haft den Lykke at have en fremragende Matematiker, Telefoningeniør Dr. Jensen, til hvis Berømmelse Kongressens Præsident talte saa smukt ved Aabningsmødet, som Leder af vor tekniske Afdeling. Ikke alene dér, men ogsaa ved selve Telefon-Driften har Betydningen af de matematiske Problemer, ikke mindst indenfor Sandsynlighedsregningen, været meget stor, og vi har allerede tidligt knyttet en Matematiker, Magister Erlang, til os som videnskabelig Medarbejder. Jeg tror, at Magister Erlang har haft Glæde af sit Arbejde, der er blevet paaskønnet ikke alene her, men ogsaa Verden over, hvor »*la formule d'Erlang*« har gaaet sin Sejersgang gennem de store Landes telefontekniske Tidsskrifter. Jeg haaber derfor, at Kongressen vil have nogen Interesse af at gøre Bekendtskab med Magister Erlang og hans Arbejde, som han nu skal have den Ære at forelægge.

Digitized by Google

SOME APPLICATIONS OF THE METHOD OF STATISTICAL EQUILIBRIUM IN THE THEORY OF PROBABILITIES

BY

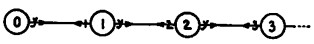
A. K. ERLANG.

The problems of which I shall speak to-day belong to the Theory of Telephone Management, which is a branch, a comparatively new one, of the theory of probabilities. Accordingly we have to deal with telephone lines, telephone conversations, telephone exchanges, either manual or more or less automatic, and so on. The main thing is, however, the *calls* of the subscribers and their different fates. Some calls are »lucky« and obtain immediately the connection desired, other calls are »unlucky« and either obtain no connection or will have to wait a certain time. The reasons are different: the person called may be occupied by another telephone talk or otherwise; all the lines connecting the two exchanges are, momentarily, occupied by other conversations; or the telephone operators have not yet finished the work caused by preceding calls. In order to understand the real nature of the important practical questions arising in the manner indicated by these examples, one must undertake a theoretical work, based on the methods of probability; and this was shown, for the first time, about 20 years ago, by Mr. *F. Johannsen*, Managing Director of the Copenhagen Telephone Company. Within a short time he succeeded in throwing light upon several questions immediately urgent then and at all times important, and also in awaking a lively interest in this new field of research. Later on, from pressure of other work, he wished to leave the continuation of the work out of his hands, although not out of his eye-view and interest, and, therefore, trusted me with it; a task which has caused me much

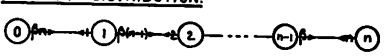
Digitized by Google

TABLE I.

POISSON'S FORMULA

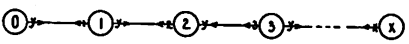


BINOMIAL DISTRIBUTION.

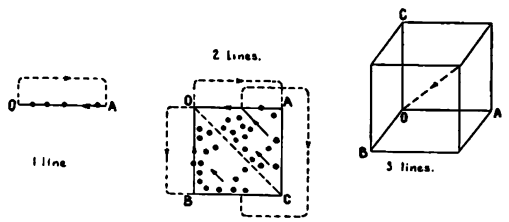


A. PROBLEMS CONCERNING LOSS OR HINDRANCE.

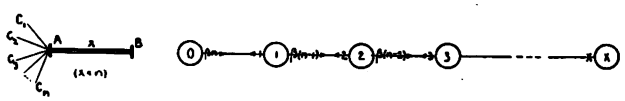
1) A GROUP OF X LINES.



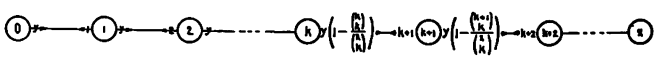
2) THE SAME CASE, WITH T=∞.



3)



4) "INTERCONNECTING"

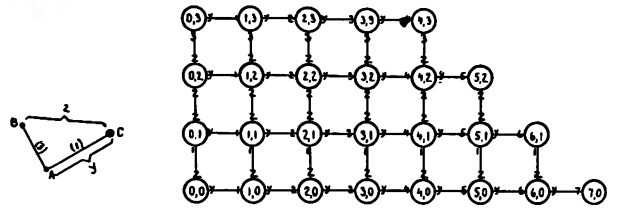


joy. I have related about the progress of the matter in several papers from 1909 onward, in Danish and other languages. In these I have given especially the exact resulting formulae of the most important and typical problems, also many tables with numerical results, but, for the sake of brevity, not always the complete demonstrations. See for instance a paper, printed in »Elektroteknikeren« 1923 and somewhat enlarged in »Annales des P. T. et T.« 1925; it is originally a lecture delivered at the H. C. Ørsted Centenary 1920, and was also printed in the reports of this meeting, section electrotechnics, 1922. In this paper may be found references to several contributions to the study of this class of problems, and to my own earlier papers. I will not state very many formulae, on this occasion, and not at all enter upon

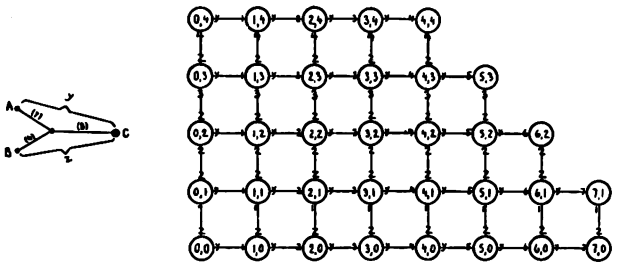
Digitized by Google

TABLE 2.

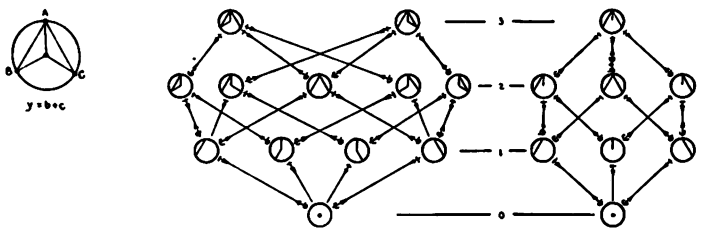
5) AN ARRANGEMENT OF THE CONNECTIONS BETWEEN C AND A,B



6) ANOTHER ARRANGEMENT OF THE CONNECTIONS BETWEEN C AND A,B.



7) 2 SPECIAL LINES, 1 COMMON LINE (BETWEEN A AND B,C).



their numerical results; but I will lay stress on the method of reasoning, especially what may be called the method of statistical equilibrium, for obtaining distribution-laws.

1. We have to consider, at first, some very simple laws of distribution.

We define the »traffic-intensity« as the product of the number of calls per unit of time into the holding time (the duration of the telephone conversation). It is, however, more convenient to take the unit of time equal to the duration of the conversation; the traffic-intensity is then simply equal to the number of calls per unit of time. We may suppose, for the present, that the duration is constant. If not, we have to speak of the mean duration instead of the duration. For the traffic-intensity we use the designation y.

Digitized by Google

Now we have to consider 3 cases, differing in respect of the number and the arrangement of the lines. In the first case we suppose, that the number is so large, that a want or shortness of lines will never occur, when the traffic-intensity is y. Now we put the question: What is the probability of 0, 1, 2... calls during a time equal to 1, or in a more tangible form, what is the probability of finding ,at an arbitrary moment, 0, 1, 2... lines occupied by conversations? (It is obvious, that the mean number of occupied lines is equal to y). For the probabilities of the different cases we may use the designations ((0)), ((1)), ((2))..., reserving the designations (0), (1), (2)... for the cases themselves. We can solve this problem, and likewise the following ones, in such a way that we find first the relative values of the probabilities and afterwards the absolute values (the sum of which is 1). We may use a graphical representation (see table 1); the different cases are here represented by a series of small circles, the transitions between the (successive) cases are indicated by connecting-lines with arrows, and the probability-densities of the transitions per unit of time by the inscriptions. By means of a series of equations, which express the conditions of equilibrium or balance, we find easily the following relative values of the required probabilities, beginning with 1:

$$1,\ y\ \frac{y^2}{\lfloor 2},\ \frac{y^3}{\lfloor 3}\ \ldots.$$

If we divide by e^y, which is the sum of this series, we find the absolute values (see table 6), and we have now reached Poisson's law, which was originally, and is usually, derived in another way.

Among many remarkable properties of *Poisson's* function $\frac{e^{-y}y^x}{\lfloor x}$, I name one here (although it is not possible to enter upon its applications): If we consider the usual double-entry table of this function and take out all the values to be found along an oblique line, the slope of which is α, the sum of the values will be equal to $\frac{1}{1-\alpha}$, for $0 < \alpha < 1$ (and also for some other, not positive, values of α). This is a direct consequence of a theorem given in 1902, in Acta Mathematica, by the late Dr. *Jensen*, who through many years was the Chief Engineer of the Telephone

Digitized by Google

Company, as we have just been reminded, and whose eminent position among Scandinavian Mathematicians is known to all present.

The two next problem are not quite so simple; they are in a certain way contrasts. The lines which go out from the telephone exchange, radiating in all directions, to the houses of the subscribers, are mutually independent. On the other hand, the lines or junctions which connect two exchanges, are cooperating; they are said to form a group or bundle. In the first of these two cases, a similar line of thought as the above will carry us into the binominal law of distribution, the law of *Pascal* and *Bernoulli*. Let n be the number of lines, β the traffic-intensity, or the number of calls per unit of time, per free line. We find the relative values of probabilities to be

$$1;\ \beta n;\ \beta^2 \frac{n(n-1)}{\underline{|2}};\ \beta^3 \frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}} \ldots .$$

And then we obtain the absolute values by division by $(1+\beta)^n$. In the specially simple case $n = 1$ we obtain $\frac{1}{1+\beta}$ and $\frac{\beta}{1+\beta}$; if instead of these quantities we put q and p, respectively, we may at once give the main result the perhaps more familiar form:

$$q^n;\ q^{n-1} \cdot p \cdot n;\ q^{n-2} p^2 \frac{n(n-1)}{\underline{|2}};\ q^{n-3} p^3 \frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}} \ldots .$$

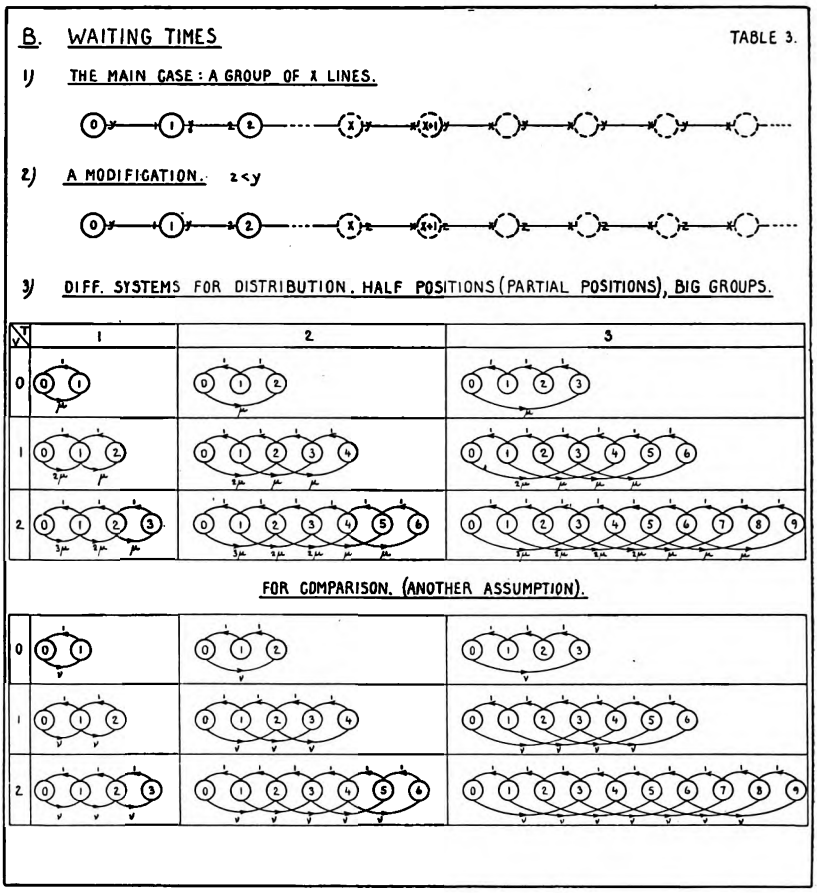
(It is easy to show that these results do not imply necessarily the hypothesis of constant duration).

Now let the lines go side by side and form a group, within which each line may replace each other; a case more important than the preceding. Let x be the number of lines. In this case the inflow of fresh conversations will not decrease gradually in proportion as the lines are occupied, but only in the moment all lines are busy the inflow will suddenly stop. We find for the required probabilities (again by use of the equilibrium-principle) firstly the relative values

$$1;\ y;\ \frac{y^2}{\underline{|2}};\ \frac{y^3}{\underline{|3}} \ldots . \frac{y^x}{\underline{|x}};$$

and, hence, secondly, the absolute values (see the collection of

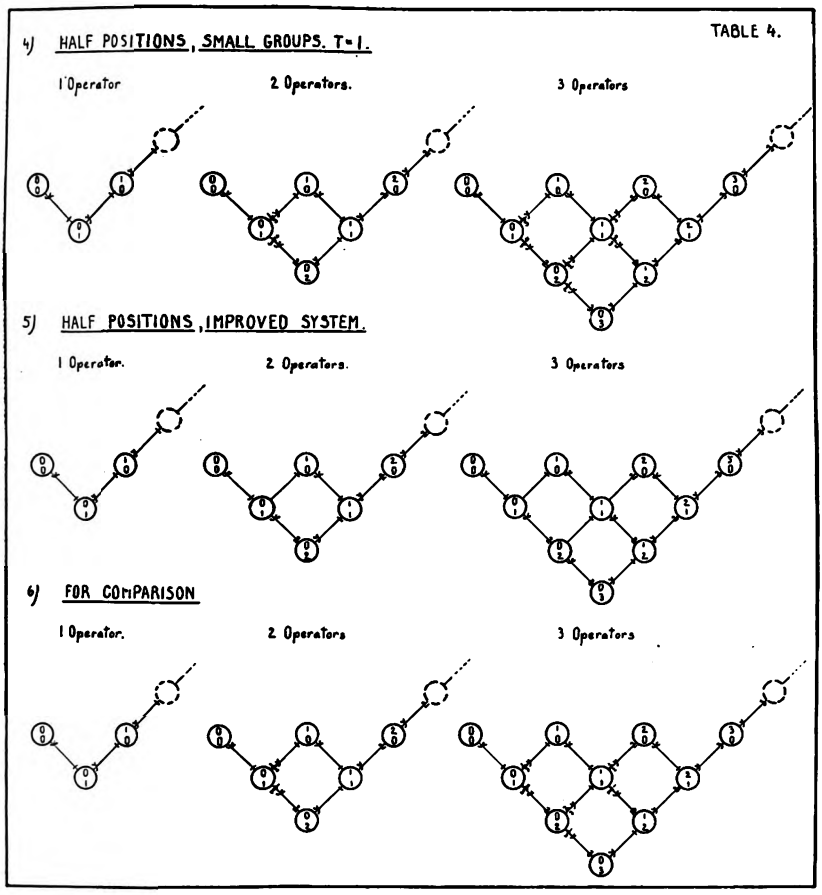
Digitized by Google



formulae, table 6). As the probability of finding all lines occupied is the same thing as the proportion B of »unlucky« or »lost« calls to all calls, sometimes called the degree of hindrance or obstruction, it is much more important in practic than the other ones. — The product B. y is the number of lost calls per unit of time. If the difference of this quantity with respect to x is fixed to be about a certain constant (depending on the price of a line per unit of time and on the value lost with the call), then we may say that x has been correctly determined, as a function of y. But we must leave the further consideration of this theme.

It will now be necessary to insert here some remarks about the law of distribution (or frequency) of the durations. For although in many cases, for instance in the case just considered,

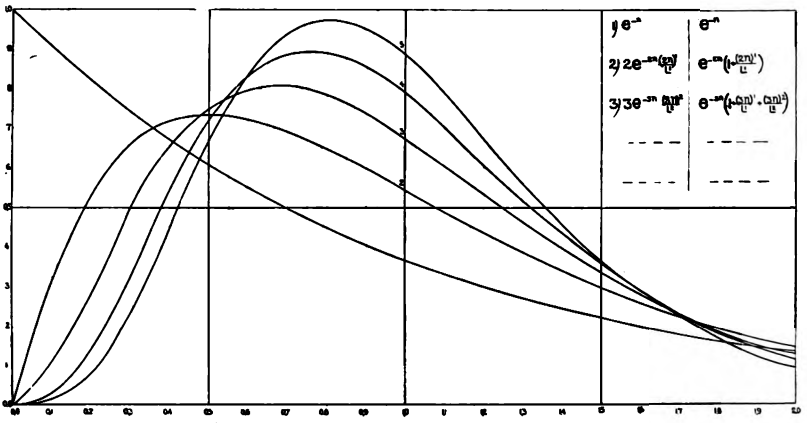
Digitized by Google



the results are really independent of the nature of the distribution, it does not follow, that the demonstration can be given with the same words, or as easily, for one law as for another. The laws which deserve mostly our attention may be seen in the collection of formulae table 6; they constitute an infinite series, and the successive terms are marked $T = 1$, $T = 2 \ldots$ $T = \infty$. As stated here, the formulae give the probability of a duration greater than n (the mean duration is always equal to 1); by a differentiation one may obtain the density of probability, which is another expression of the law. Compare table 5. The simplest and most important law is, no doubt, the first one; we come to this law, if we suppose, that the »force of mortality« (we borrow this word from another domain) is independent

Digitized by Google

TABLE 5.
Duration of a Telephone Conversation: Different possible Laws of Distribution.



of the »age«. About 200 years ago it was commonly believed, in Denmark at least, that the probability of death within a year was the same for all ages. We know, that this is wrong; although no doubt some causes of death will hit the young and the old indifferently. But the life of a telephone conversation comports very well with the simple rule, as borne out by practical tests. Only some very special classes of conversations, for instance those caused by the communication of the »number« to the telephone operator, must be excepted, as they will not agree with this law, but more nearly with one of the following ones. For the rest all these laws are closely related. For instance, No. 2 may be taken as the law of the duration of a compound conversation, if the two components are of the type No. 1, with a mean duration of $\frac{1}{2}$, and so on. Conversely, the »compound« conversations may be dissected into simple ones, and in this manner we may simplify many problems. The expressions of the probability of a duration exceeding n may now be written down immediately (by means of *Poisson's* formula). The limiting case, $T = \infty$, is obviously identical with the case of constant duration.

Now we return to the demonstration postponed and start with the assumption $T = 1$; here it is possible to treat each of the cases (0), (1), (2)... (x) (that is to say 0, 1, 2...x lines occupied) without regarding the ages of the single conversations,

Digitized by Google

and accordingly the demonstration is straightforward. On the other hand, if $T = 1$, the ages, or better the residual life times, are important and must be specified; for this purpose we may use, for $x = 1, 2,$ and 3, respectively, a line-segment, a square, and a cube. For $x = 2$, for instance, we may place a point within the square, or on the sides OA and OB, or in the corner O. If, now, we use an infinite number of points, if, further, we strew evenly all parts of the square, and also evenly all points of the sides OA and OB, not forgetting the corner point O, and if we choose properly the relative probabilities of the three main-cases, then (and only then) we can easily show the existence of a statistical equilibrium. This equilibrium is caused by all the changes forthcocming as a consequence either of the progress of time or of the arrival of new calls. — If $x > 3$, we must do without a figure, but otherwise we can reason in the same manner.

I should like to give also a proof comprehending at once all laws of distribution; I will only say, that it is suggested by a comparison of the two cases; firstly an infinite number of lines, secondly, x lines; the relative values of the x probabilities $((0))$, $((1))$, $((2))$... $((x))$ are, and must be, the same in both cases.

2. We will consider a few different line-systems, most of them a little more complicated than the preceding ones. In the figure 3 (table 1) an important case is represented; it is, in a way, a combination of the two just treated. We see, to the right, x lines running side by side, between the two points (exchanges) A and B, and to the left we see n lines (subscribers' lines) radiating in all directions to the points C_1, C_2... C_n. The calls may originate from the left or from the right, indifferently. The traffic-intensity, or the number of calls per unit of time, per subscriber (unoccupied) is β. We can have here, at most, x conversations running at the same time. We easily find the fundamental probabilities $((0))$, $((1))$, $((2))$... $((x))$, and afterwards other probabilities, the most important being the probability of the existence, or non-existence, at an arbitrary moment, of a free way C-A-B between a certain subscriber C and the exchange B.

In fig: 4 we have a system of x lines, which constitute a group. Each forthcoming call will try (automatically) a number k of the lines (not all the lines); if the k lines are engaged, the call is lost. For the rest, the choice of the k lines is a new one for each subsequent call, and upon the whole, they are selected in

Digitized by Google

TABLE 6.

POISSON'S FORMULA
(A large number of lines).

$$\begin{cases} S_0 = e^{-y} \\ S_1 = e^{-y} \cdot y \\ S_2 = e^{-y} \cdot \dfrac{y^2}{\lfloor 2} \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

BINOMIAL DISTRIBUTION
(n independent lines).

$$\begin{cases} S_0 = 1 \cdot \dfrac{1}{(1+\beta)^n} \\ S_1 = \dfrac{\beta n}{1} \cdot \dfrac{1}{(1+\beta)^n} \\ S_2 = \dfrac{\beta^2 \cdot n(n-1)}{\lfloor 2} \cdot \dfrac{1}{(1+\beta)^n} \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ S_n = \beta^n \cdot \dfrac{1}{(1+\beta)^n} \end{cases}$$

LOSS OR HINDRANCE
(A group of x lines).

$$\begin{cases} S_0 = \dfrac{1}{1 + y + \dfrac{y^2}{\lfloor 2} + \ldots \dfrac{y^x}{\lfloor x}} \\ S_1 = \dfrac{y}{1 + y + \dfrac{y^2}{\lfloor 2} + \ldots \dfrac{y^x}{\lfloor x}} \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ S_x = \dfrac{\dfrac{y^x}{\lfloor x}}{1 + y + \dfrac{y^2}{\lfloor 2} + \ldots \dfrac{y^x}{\lfloor x}} \end{cases}$$

DIFFERENT LAWS OF DISTRIBUTION FOR THE DURATION

$$\begin{array}{l|l} (T=1) & S = e^{-n} \\ (T=2) & S = e^{-2n}\left(1 + \dfrac{2n}{\lfloor 1}\right) \\ (T=3) & S = e^{-3n}\left(1 + \dfrac{3n}{\lfloor 1} + \dfrac{(3n)^2}{\lfloor 2}\right) \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \end{array}$$

Digitized by Google

TABLE 7.

WAITING-TIMES
(A group of x lines, $T = 1$).

$$\begin{cases} ((x)) = c \cdot \dfrac{x-y}{x} \\ ((x+1)) = ((x)) \cdot \dfrac{y}{x} \\ ((x+2)) = ((x+1)) \cdot \dfrac{y}{x} \\ \quad . \qquad . \\ \quad . \qquad . \\ \quad . \qquad . \\ \quad . \qquad . \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = \dfrac{1}{D(x) - D(x-1)} \\ D(x) = \dfrac{1 + y + \dfrac{y^2}{\underline{|2}} + \cdots \dfrac{y^x}{\underline{|x}}}{\dfrac{y^x}{\underline{|x}}} \\ D(x-1) = \dfrac{1 + y + \dfrac{y^2}{\underline{|2}} + \cdots \dfrac{y^{x-1}}{\underline{|x-1}}}{\dfrac{y^{x-1}}{\underline{|x-1}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S(>n) = ((x)) \cdot e^{-xn} + ((x+1)) \cdot e^{-xn}\left[1 + \dfrac{xn}{\underline{|1}}\right] + ((x+2)) \cdot e^{-xn}\left[1 + \dfrac{xn}{\underline{|1}} + \dfrac{(xn)^2}{\underline{|2}}\right] + \cdots \\ S(>n) = e^{-xn}\left[((x)) + ((x+1)) + \cdots\right] + e^{-xn} \cdot \dfrac{xn}{\underline{|1}}\left[((x+1)) + ((x+2)) + \cdots\right] + \\ \qquad e^{-xn} \cdot \dfrac{(xn)^2}{\underline{|2}}\left[((x+2)) + ((x+3)) + \cdots\right] + \cdots \end{cases}$$

$$S(>n) = c \cdot e^{-(x-y)n}$$

$$\begin{cases} M = \left[1 \cdot ((x+1)) + 2 \cdot ((x+2)) + 3 \cdot ((x+3)) + \cdots\right]\dfrac{1}{y} \\ M = \left[1 \cdot ((x)) + 2 \cdot ((x+1)) + 3 \cdot ((x+2)) + \cdots\right]\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$M = c \cdot \frac{1}{x-y}$$

Digitized by Google

as many ways as possible. The figure indicates the beginning of the solution of the problem; the resulting formulae and also numerical tables have been given elsewhere. This system belongs to a type, ordinarily named systems with »interconnecting«.

In fig: 5 we have a group of 3 lines between A and B, 7 between B and C; C is the main telephone-exchange, to which or from which (almost) all the traffic is going; the traffic y between B and C, and z between A and C. The different possible cases are represented in the oblique quadrangle as circles; the cases represented at the top of this figure and to the right are specially important. The conditions of equilibrium may be written down by considering the »transitions« between each case (circle) and its surroundings in the figure. The same relative values may be derived in a simpler way, if we consider the horizontal or vertical connecting lines, one at a time; for each single line we find (in this problem) a special balance.

The problem of fig: 6 is of a similar type.

The problem of fig: 7 is one resolved by Dr. *A. E. Vaulot* (in Revue Génerale de l'Electricité, 1924); we have here 2 special lines, AB and AC, and a common line acting as a reserve for both.

3. Let us consider a group of x lines, with a traffic intensity y. Let us suppose, that a call, which cannot obtain a line at once, will keep waiting and thereby obtain a line, in its turn. For simplicity, we consider here only the hypothesis $T=1$. The series of possible cases is not limited to $(0), (1) \ldots (x)$, but it goes on with $(x+1), (x+2) \ldots$, that is, in addition to the calls which have already found a connection, we may have 1, 2 ... calls waiting. See table 3. — We easily find the required probabilities $((0)), ((1)) \ldots ((x)), ((x+1)), ((x+2)) \ldots$; the last ones, from $((x))$ onward, are the most interesting. In table 7 are found the expressions of these by means of their sum c, and further the expression of c by $D(x)$ and $D(x-1)$, defined at the same place as functions of x and y.

Now we are able to find also the probability $S(>n)$ of a waiting-time exceeding n. If we take a view of the chances of this eventuality, we see at once, that these depend partly on the number of calls waiting already, partly on the number of conversations coming to an end in the course of the time n. We find

Digitized by Google

the probability in question in the shape of a doubly infinite series and by summation we get the result:

$$S(>n) = c \cdot e^{-(x-y)n}.$$

Further, it is very desirable to find the mean waiting-time M; one can perform this in different ways, f. inst. by aid of the formula just mentioned, or also more directly by means of one of the two equations (each of them easily found):

$$M = [1 \cdot ((x+1)) + 2 \cdot ((x+2)) + 3 \cdot ((x+3)) \ldots] \cdot \frac{1}{y}$$

$$M = [1 \cdot ((x)) + 2 \cdot ((x+1)) + 3 \cdot ((x+2)) \ldots] \cdot \frac{1}{x}$$

In each of these ways we find:

$$M = \frac{c}{x-y}.$$

We have supposed, that the lines when disengaged are given to the waiting calls in turn. If, however, they are allotted by pure accident, which is often the case in practice, we have to deal with another (and more difficult) problem; mark that both $S(>0)$ and M retain the same value as formerly.

Another modification of the problem is met with, if a certain fractional part of the callers will not wait, and the rest will wait (See fig: 2). It is easy to find out the consequences of this, for the one and the other part.

4. All the just mentioned results concerning waiting-times are valid not only for a group of x lines, but also for a group of x operators, whose common task it is to make the connections required by a number of subscribers. As is well known it is possible to build up a telephone-system for a large town without operators. But the technical investigations undertaken especially by Mr. *P. V. Christensen*, Chief-Engineer of our Company, have shown, that the economy is doubtful at least in the case of Copenhagen; also by the »automatic« system a great amount of work is laid upon the subscribers themselves. For the present and probably in the future the operators will be retained in Copenhagen, but for the distribution of the calls automatic devices are provided, in order to direct each call to an operator, which either is ready or at least, probably will be ready very soon.

Digitized by Google

TABLE 8.

AUTOMATIC DISTRIBUTION, HALF POSITIONS; BIG GROUPS
Supposition: Half chance, if one call is waiting.

	$T=1$	$T=2$	$T=3$
((0))	$((0)) = 1 \cdot a$	$((0)) = 1 \cdot a$	$((0)) = 1 \cdot a$
((1))	$((1)) = 2\mu \cdot a$	$((1)) = 2\mu \cdot a$	$((1)) = 2\mu \cdot a$
((2))	$((2)) = 2\mu^2 \cdot a$	$((2)) = (2\mu + 2\mu^2) \cdot a$	$((2)) = (2\mu + 2\mu^2) \cdot a$
((3))		$((3)) = (4\mu^2 + 2\mu^3) \cdot a$	$((3)) = (2\mu + 4\mu^2 + 2\mu^3) \cdot a$
((4))		$((4)) = (2\mu^3 + 2\mu^4) \cdot a$	$((4)) = (6\mu^2 + 6\mu^3 + 2\mu^4) \cdot a$
((5))			$((5)) = (4\mu^2 + 6\mu^3 + 2\mu^4) \cdot a$
((6))			$((6)) = (2\mu^3 + 4\mu^3 + 2\mu^4) \cdot a$
$\frac{1}{a} =$	$1 + 2\mu + 2\mu^2 =$ $1 + 2\mu\,(1 + \mu)$	$1 + 4\mu + 8\mu^2 + 4\mu^3 =$ $1 + 4\mu\,(1 + \mu)^2$	$1 + 6\mu + 18\mu^2 + 18\mu^3 + 6\mu^6 =$ $1 + 6\mu\,(1 + \mu)^3$

Supposition: Full chance, if one call is waiting.
(For comparison with the above).

	$T=1$	$T=2$	$T=3$
((0))	$((0)) = 1 \cdot a$	$((0)) = 1 \cdot a$	$((0)) = 1 \cdot a$
((1))	$((1)) = \nu \cdot a$	$((1)) = \nu \cdot a$	$((1)) = \nu \cdot a$
((2))	$((2)) = \nu^2 \cdot a$	$((2)) = (\nu + \nu^2) \cdot a$	$((2)) = (\nu + \nu^2) \cdot a$
((3))		$((3)) = (2\nu^2 + \nu^3) \cdot a$	$((3)) = (\nu + 2\nu^2 + \nu^3) \cdot a$
((4))		$((4)) = (\nu^3 + \nu^3) \cdot a$	$((4)) = (3\nu^2 + 3\nu^3 + \nu^4) \cdot a$
((5))			$((5)) = (2\nu^3 + 3\nu^3 + \nu^4) \cdot a$
((6))			$((6)) = (\nu^3 + 2\nu^3 + \nu^4) \cdot a$
$\frac{1}{a} =$	$1 + \nu + \nu^2 =$ $1 + \nu\,(1 + \nu)$	$1 + 2\nu + 4\nu^2 + 2\nu^3 =$ $1 + 2\nu\,(1 + \nu)^2$	$1 + 3\nu + 9\nu^2 + 9\nu^3 + 3\nu^4 =$ $1 + 3\nu\,(1 + \nu)^3$

The systems used in the most modern parts of our main telephone-exchange and also in some other exchanges, are called »half-position systems«. Each operator has two »half-positions«; the half-position which she is serving at the moment, is barred for access, the other one is free, if no call is waiting there, and barred if one call is waiting. (Instead of giving the operator two half-positions it is, of course, also possible to give her three

Digitized by Google

TABLE 9.

AUTOMATIC DISTRIBUTION, HALF POSITIONS, BIG GROUPS
Supposition: Half chance, if one call is waiting.

	$T=1$	$T=2$	$T=3$	$T=\infty$
$a=$	$\frac{2\mu(1+\mu)}{1+2\mu(1+\mu)}$	$\frac{4\mu(1+\mu)^2}{1+4\mu(1+\mu)^2}$	$\frac{6\mu(1+\mu)^3}{1+6\mu(1+\mu)^3}$	$\frac{2g}{2g+e^{-g}}$ $(g=\lim T\mu)$
$M=$	$\frac{\mu}{1+\mu}$	$\frac{\mu(1+2(1+\mu)}{2(1+\mu)^2}$	$\frac{\mu(1+2(1+\mu)+3(1+\mu)^2)}{3(1+\mu)^3}$	$\frac{g-1+e^{-g}}{g}$
$S(>)=$	$\mu\frac{1}{1+\mu}\cdot e^{-n}$	$\mu\left(\frac{1}{(1+\mu)^2}+\frac{1+2n}{1+\mu}\right)e^{-2n}$	$\mu\left(\frac{1}{(1+\mu)^3}+\frac{1+3n}{(1+\mu)^2}+\frac{1+3n+\frac{9n^2}{2}}{1+\mu}\right)e^{-3n}$	$1-e^{-g(1-n)}$ $(n<1)$

Supposition: Full chance, if one call is waiting. (For comparison with the above).

	$T=1$	$T=2$	$T=3$	$T=\infty$
$a=$	$\frac{\nu(1+\nu)}{1+\nu(1+\nu)}$	$\frac{2\nu(1+\nu)^2}{1+2\nu(1+\nu)^2}$	$\frac{3\nu(1+\nu)^3}{1+3\nu(1+\nu)^3}$	$\frac{2h}{2h+e^{-h}}$ $(h=\lim T\nu)$
$M=$	$\frac{\nu}{1+\nu}$	$\frac{\nu(1+2(1+\nu))}{2(1+\nu)^2}$	$\frac{\nu(1+2(1+\nu)+3(1+\nu)^2)}{3(1+\nu)^3}$	$\frac{h-1+e^{-h}}{h}$
$S(>)=$	$\nu\frac{1}{1+\nu}e^{-n}$	$\nu\left(\frac{1}{(1+\nu)^2}+\frac{1+2n}{1+\nu}\right)e^{-2n}$	$\nu\left(\frac{1}{(1+\nu)^3}+\frac{1+3n}{(1+\nu)^2}+\frac{1+3n+\frac{9n^2}{2}}{1+\nu}\right)e^{-3n}$	$1-e^{-h(1-n)}$ $(n<1)$

Digitized by Google

third-part-positions, and so on). If we will study this system closely, we remark, that two modifications present themselves naturally for choice: the operator, who has one half-position inoccupied, may have just the same chance, as the operator who has two, or she may have only half a chance; the last arrangement is generally preferred in practice. We may very often content ourselves with studying the case of a large group of operators, which is relatively simple. We may further suppose T = 1, or 2, or 3.... The different stages or degrees of occupation of an operator are represented in fig: 3, table 3, by the circles. In table 8 is further shown how to find the corresponding fundamental prohabilities; and the hence resulting formulae, of S ($>$) and of M, are shown in table 9.

For small groups of operators, f. inst. for x = 1, 2, 3..., the problem is somewhat more difficult, and therefore I have treated it only with the supposition T = 1 (and only the half-positions, not the third-part positions et cetera). See figs. 4 - 5 - 6, table 4. In one of these figures, fig: 5, is shown a new and improved form of the half-position system. In this system an operator, who has only one half-position free, has absolutely no chance of being chosen, if, at the same time, it is possible to find an operator, who has two. The manner of action of this system will be clearly indicated by the figure.

If time had permitted, it would have been interesting to draw some connecting lines into other known applications of the conception of statistical equilibrium. I can just name: 1) *Euler*'s theory on the age-distribution of a population, about 1750, see Opera, series 1, vol. 7; a special case already treated by *Halley;* new contributions by *Lotka* and by *Nybølle;* 2) *Maxwell's* famous law of distribution for the velocities of gas molecules (an elementary proof, by myself, in »Fysisk Tidsskrift« 1925); and 3) the very interesting researches on the ultimate consequences of *Mendel's* laws of heredity, by *Hardy, Hagström, Bernstein.*

Digitized by Google

ÜBER ALLGEMEINE FOURIER- UND DIRICHLET-ENTWICKLUNGEN

VON

HARALD BOHR

In diesem Vortrage soll teils von einer Klasse von Funktionen $F(t) = U(t) + i\,V(t)$ einer reellen Variablen t (die wir immer als im ganzen Intervalle $-\infty < t < \infty$ gegeben und überall stetig voraussetzen), teils von einer Klasse von analytischen Funktionen einer komplexen Variablen die Rede sein. Die Funktionen beider Klassen sollen fastperiodische Funktionen genannt werden. Mit den Funktionen der ersten Klasse wird der Begriff verallgemeinerter Fourierreihen, mit den Funktionen der zweiten der Begriff verallgemeinerter Dirichletreihen verknüpft. Da ich schon früher — auf der Naturforscherversammlung in Innsbruck voriges Jahr — über die Theorie der fastperiodischen Funktionen einer reellen Variablen berichtet habe, soll in dem heutigen Vortrage das Hauptgewicht auf die fastperiodischen analytischen Funktionen gelegt werden; die Theorie der reellen Funktionen soll nur soweit herangezogen werden als nötig ist, um die Grundlage zu schaffen, auf welcher die Theorie der fastperiodischen analytischen Funktionen basiert, und um eine natürliche Einführung in diese letzte Theorie zu erhalten. Zunächst einige Worte über die

Problemstellung.

Die gewöhnliche Theorie der Fourierreihen reeller Funktionen handelt von der Frage, welche Funktionen $F(t)$ in eine Folge von harmonischen Schwingungen zerlegt werden können, d. h. in eine Reihe der Form

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inkt},$$

Digitized by Google

wo die Exponenten nk eine arithmetische Progression bilden. Für die Darstellbarkeit einer Funktion $F(t)$ durch eine solche Reihe ist es von vorneherein eine notwendige Bedingung, dass $F(t)$ reinperiodisch $\left(\text{mit der Periode } \frac{2\pi}{k}\right)$ ist, und das klassische Resultat der Theorie der Fourierreihen besagt, dass diese Bedingung der Periodizität für die (geeignet zu verstehende) Darstellbarkeit auch hinreicht. Dass allgemeinere Problem, welches zu den fastperiodischen Funktionen führt, ist nun das folgende:

Welche Funktionen $F(t)$ lassen sich überhaupt in eine abzählbare Folge von periodischen Schwingungen auflösen, d. h. durch eine Reihe der Form

$$\Sigma a_n e^{i\lambda_n t}$$

darstellen, wo die Exponenten λ_n ganz beliebige (nicht etwa vorgeschriebene) reelle Zahlen sind?

Die Theorie der fastperiodischen Funktionen einer reellen Variablen und ihrer Reihenentwicklungen habe ich in zwei Abhandlungen in den Acta mathematica (Bd. 45 und 46) entwickelt. In einer dritten im Druck befindlichen Arbeit habe ich diese Theorie auf analytische Funktionen übertragen, und bin dadurch zu einer natürlichen Verallgemeinerung der Theorie der Potenzreihen und Laurentreihen gelangt. Über diese letzte Arbeit soll ich hier berichten.

Wir gehen von einer komplexen Variablen $z = r e^{i\theta}$ aus und betrachten die kontinuierlich vielen Potenzen $z^\lambda = r^\lambda e^{i\lambda\theta}$, wo λ alle reellen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, und zwar betrachten wir sie auf der unendlichblättrigen Riemannschen Fläche L: $0 < r < \infty$, $-\infty < \theta < \infty$, d. h. auf der Fläche des Logarithmus mit den beiden Verzweigungspunkten unendlich hoher Ordnung $z = 0$ und $z = \infty$. Unsere Fragestellung lautet dann:

Wie muss eine in einem unendlichblättrigen Kreisringe $r_1 < r < r_2$, $-\infty < \theta < \infty$ der Fläche L reguläre analytische Funktion $f(z)$ beschaffen sein, damit sie im ganzen Kreisringe (also in allen Blättern zugleich, und nicht nur in jedem endlichblättrigen Teilgebiet) aus abzählbar vielen Potenzen z^{λ_n} additiv aufgebaut werden kann, d. h. eine sinnvolle Darstellung der Form

$$\Sigma a_n z^{\lambda_n}$$

zulässt?

Digitized by Google

Besonderes Interesse bietet der Fall $r_1 = 0$ (oder der entsprechende Fall $r_2 = \infty$), wo unsere Fragestellung darauf hinausläuft zu untersuchen, welches Funktionsverhalten in einem logarithmischen Windungspunkt durch eine »irreguläre« Potenzreihe $\Sigma a_n z^{\lambda_n}$ bewältigt werden kann.

Um möglichst direkten Anschluss an die eingangs erwähnte Theorie der fastperiodischen Funktionen einer reellen Variablen zu bekommen, wird es im Folgenden bequem sein, durch die einfache Transformation $z = e^s$ von der Riemannschen Fläche L zu der schlichten Ebene der Variablen $s = \sigma + it$ überzugehen. Die Frage lautet dann:

Welche in einem Streifen $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ regulären analytischen Funktionen $f(s)$ lassen sich in eine Reihe der Form

$$\Sigma a_n e^{\lambda_n s},$$

also in eine Dirichletsche Reihe, entwickeln?

Dem obigen Falle $r_1 = 0$ (bezw. $r_2 = \infty$) entspricht hier der Fall $\sigma_1 = -\infty$ (bezw. $\sigma_2 = +\infty$), wo der Streifen $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ zu einer ganzen linken oder rechten Halbebene erweitert ist.

Wir heben sogleich hervor, dass unser Begriff einer »Dirichletschen Reihe« sich von dem sonst üblichen in zwei wesentlichen Hinsichten unterscheidet. Erstens gehen wir nicht von einer beliebig hingeschriebenen Reihe aus, sondern lassen nur solche Reihen zu, welche von einer Funktion erzeugt werden, und zweitens sind bei uns den Exponenten λ_n gar keine Bedingungen auferlegt (sie können z. B. auf der ganzen λ-Achse überall dicht liegen), während man sonst nur solche Exponentenfolgen betrachtet, die sich nicht im Endlichen häufen. Dieser letzte Punkt ist für unsere ganze Theorie von entscheidender Bedeutung; erst durch das Fallenlassen jedweder Einschränkungen für die Exponentenfolgen entsteht die Möglichkeit einer einfachen und übersichtlichen Charakterisierung der Klasse von Funktionen, welche in Dirichletsche Reihen entwickelt werden können. Und diese Charakterisierung ist, wie wir sehen werden, einfach die, dass die Funktionen in bezug auf die Ordinate t fastperiodisch sein sollen. Bevor wir den Aufbau der fastperiodischen analytischen Funktionen anfangen, geben wir zunächst ein kurzes

Digitized by Google

Resumé der Theorie der fastperiodischen Funktionen einer reellen Variablen.

Die grundlegende Definition lautet:

Die Funktion $F(t)$ soll fastperiodisch heissen, wenn es zu jedem ε eine Länge $l = l(\varepsilon)$ so gibt, dass jedes Intervall $t_1 < t < t_2$ der Länge l mindestens eine zu ε gehörige »Verschiebungszahl« τ enthält, d. h. eine Zahl $\tau = \tau(\varepsilon)$, welche für alle t der Ungleichung

$$|F(t+\tau) - F(t)| \leqq \varepsilon$$

genügt.

Mit anderen Worten, zu jedem ε soll es unendlich viele Verschiebungszahlen τ geben, und die Menge der zu einem festen ε gehörigen τ soll auf der t-Achse »relativ dicht« liegen, in dem Sinne, dass sie keine beliebig grossen Lücken aufweisen darf.

Es ist klar, dass jede reinperiodische Funktion $F(t)$, also speziell jede reine Schwingung $a e^{i\lambda t}$, auch fastperiodisch ist.

Für die fastperiodischen Funktionen gelten die folgenden Sätze:

I. Jede Funktion $F(t)$ ist im ganzen Intervalle $-\infty < t < \infty$ beschränkt und gleichmässig stetig.

II. Die Summe und das Produkt von fastperiodischen Funktionen ist wieder fastperiodisch; also ist speziell jedes Exponentialpolynom

$$\sum_1^N a_n e^{i\lambda_n t},$$

wo die λ_n beliebige reelle Zahlen, die a_n beliebige komplexe Zahlen bedeuten, eine fastperiodische Funktion. Auch die Grenzfunktion einer im ganzen Intervalle $-\infty < t < \infty$ gleichmässig konvergierenden Folge von fastperiodischen Funktionen ist wieder fastperiodisch, so dass jede gleichmässig konvergente Reihe der Form

$$\sum_1^\infty a_n e^{i\lambda_n t}$$

durch ihre Summe eine fastperiodische Funktion darstellt. Ferner bemerken wir, dass der Quotient zweier fastperiodischen Funktionen fastperiodisch ausfällt, wenn nicht der Nenner beliebig nahe an Null herankommt, und dass auch das Integral $\int F(t)\,dt$ fastperiodisch ist, wenn es überhaupt beschränkt bleibt.

III. Es existiert der Mittelwert

$$M\{F(t)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} F(t)\,dt.$$

Digitized by Google

IV. Also existiert auch (nach II) bei jedem reellen λ der Mittelwert

$$a(\lambda) = M\{F(t)\, e^{-i\lambda t}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} F(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt.$$

Es gibt aber nur abzählbar viele Werte von λ, für welche dieser Mittelwert $a(\lambda)$ von 0 verschieden ist. Wir bezeichnen die so herausspringenden Exponenten λ (in irgendeiner Anordnung) mit $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$, und die entsprechenden Mittelwerte $a(\Lambda_1), a(\Lambda_2), \ldots$ mit $A_1, A_2, \ldots$, und nennen die formal gebildete Reihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n t}$ die Fourierreihe von $F(t)$, in Zeichen

$$F(t) \sim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n t}.$$

Wenn $F(t)$ reinperiodisch ist, fällt unsere so gebildete Fourierreihe mit der gewöhnlichen Fourierreihe $\Sigma a_n e^{inkt}$ zusammen.

V. Die Theorie gewinnt erst ihre eigentliche Bedeutung durch den Eindeutigkeitssatz. Eine fastperiodische Funktion ist durch ihre Fourierreihe eindeutig bestimmt, d. h. zu zwei verschiedenen fastperiodischen Funktionen gehören zwei verschiedene Fourierreihen.

VI. Der Beweis des Eindeutigkeitssatzes ergibt sich unschwer aus dem folgenden, recht tief liegenden Fundamentalsatz: Es besteht für jede fastperiodische Funktion die (Parsevalsche) Gleichung

$$M\{|F(t)|^2\} = \Sigma |A_n|^2.$$

Diese Gleichung besagt in anderer Formulierung, dass die Fourierreihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n t}$ im Mittel gegen $F(t)$ konvergiert, d. h.

$$\lim_{N\to\infty} M\left\{\left|F(t) - \sum_1^N A_n\, e^{i\Lambda_n t}\right|^2\right\} = 0.$$

VII. Das Rechnen mit Fourierreihen geschieht nach den denkbar einfachsten Regeln: Die Fourierreihe einer Summe, eines Produktes, einer Grenzfunktion, eines Integrales entsteht durch formales Rechnen mit den Fourierreihen der vorgelegten Funktionen.

VIII. Eine präzise Charakterisierung der fastperiodischen Funktionen vom Standpunkte der Schwingungstheorie wird durch den Approximationssatz geliefert, welcher einen berühmten Weierstrass'schen Satz über reinperiodische Funktionen auf fastperiodische Funktionen verallgemeinert: Damit $F(t)$ fastperio-

Digitized by Google

disch ist, ist notwendig und hinreichend, dass sie sich gleichmässig im ganzen Intervalle $-\infty < t < \infty$ durch Exponentialpolynome $\sum_1^N a_n e^{i\lambda_n t}$ approximieren lässt.

IX. In gewissen speziellen Fällen können zu den erwähnten Approximationssummen einfach die Abschnitte $\sum_1^N A_n e^{iA_n t}$ der Fourierreihe gewählt werden, nämlich wenn diese Reihe gleichmässig gegen $F(t)$ konvergiert. Dies tritt z. B. immer dann ein, wenn die Exponenten A_n linear unabhängig sind, oder die Koeffizienten A_n alle positiv sind.

Und nunmehr wenden wir uns unserer Hauptaufgabe zu, dem Bericht über die

Theorie der fastperiodischen Funktionen einer komplexen Variablen.

Wie wir sehen werden, hat diese Theorie gewisse allgemeine Hauptzüge mit der oben skizzierten Theorie der fastperiodischen Funktionen einer reellen Variablen gemein. Ein Teil der neuen Theorie verläuft aber in ganz anderen Bahnen, indem er erst durch die hinzukommende Voraussetzung des analytischen Charakters der Funktionen bedingt ist.

Die zu Grunde gelegte Definition lautet hier:

Eine in einem Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ ($-\infty \leqq \alpha < \beta \leqq +\infty$) reguläre analytische Funktion soll »fastperiodisch in (α, β)« heissen, wenn es zu jedem ε eine Länge $l = l(\varepsilon)$ so gibt, dass jedes Intervall $t_1 < t < t_2$ der Länge l auf der imaginären Achse mindestens eine zu ε gehörige Verschiebungszahl $\tau = \tau(\varepsilon)$ enthält, d. h. eine Zahl τ, welche für alle s im ganzen Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ der Ungleichung genügt

$$|f(s + i\tau) - f(s)| \leqq \varepsilon.$$

Man sieht, dass von der Funktion verlangt wird, 1) dass sie auf jeder vertikalen Geraden $\sigma = \sigma_0$ des Streifens $\alpha < \sigma < \beta$ eine fastperiodische Funktion der Ordinate t ist, und 2) dass die Fastperiodizität auf den verschiedenen Geraden »gleichartig« stattfindet.

Auch hier gilt natürlich, dass jede in einem Streifen (α, β) reinperiodische Funktion $f(s)$ ebenfalls fastperiodisch ist. Spe-

Digitized by Google

ziell ist also jede reine Schwingung $a\,e^{\lambda s}$, wo λ eine beliebige reelle Zahl bedeutet, fastperiodisch in der ganzen Ebene $(-\infty, +\infty)$.

Es ist für die Darstellung bequem, ausser dem obigen Begriff »fastperiodisch in (α, β)« auch einen Begriff »fastperiodisch in $[\alpha, \beta]$« einzuführen; hierunter soll einfach verstanden werden, dass $f(s)$ bei jedem $\delta > 0$ im Teilstreifen $(\alpha + \delta, \beta - \delta)$ fastperiodisch ist.

Wie bei den fastperiodischen Funktionen einer reellen Variablen gilt auch hier der Satz:

Jede in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion $f(s)$ ist in $[\alpha, \beta]$ (d. h. in jedem Teilstreifen) beschränkt (und schon deshalb, als analytische Funktion, gleichmässig stetig in $[\alpha, \beta]$). Von wesentlicher Bedeutung ist nun der folgende Satz, welcher eine Art von Umkehrung besagt: Wenn von einer im Streifen (α, β) regulären Funktion $f(s)$ nur bekannt ist, dass sie auf einer einzigen Geraden $\sigma = \sigma_0$ des Streifens fastperiodisch ist (d. h. die Funktion $f(\sigma_0 + it) = F(t)$ ist eine fastperiodische Funktion von t), dann ist $f(s)$ von selbst fastperiodisch im ganzen Streifen $[\alpha, \beta]$, falls sie nur in $[\alpha, \beta]$ beschränkt bleibt. Dieser Satz erlaubt den Begriff eines Maximalstreifens der Fastperiodizität einer Funktion $f(s)$ einzuführen, d. h. des grössten Streifens $[\alpha^*, \beta^*]$, welcher den gegebenen Fastperiodizitätsstreifen $[\alpha, \beta]$ enthält, und in welchem $f(s)$ noch beschränkt (und daher auch fastperiodisch) bleibt.

Der erwähnte Satz liefert uns auch eine sehr bequeme Handhabe, fertige Sätze aus der Theorie der fastperiodischen Funktionen einer reellen Variablen direkt auf komplexe Variable zu übertragen, ohne nochmals auf Beweise einzugehen. So beweist man z. B. mit seiner Hilfe sofort den Satz, dass die Summe zweier in einem Streifen $[\alpha, \beta]$ fastperiodischen Funktionen wieder in $[\alpha, \beta]$ fastperiodisch ist. Denn $f(s)$ und $g(s)$, und daher auch $f(s) + g(s)$, sind beschränkt in $[\alpha, \beta]$, und auf einer beliebig gewählten festen Geraden $\sigma = \sigma_0$ sind $f(\sigma_0 + it)$ und $g(\sigma_0 + it)$ und also auch $f(\sigma_0 + it) + g(\sigma_0 + it)$ fastperiodische Funktionen von t. Auch das Produkt und die Grenzfunktion einer gleichmässig konvergenten Folge von fastperiodischen Funktionen ist wieder fastperiodisch; speziell stellt also jede in $[\alpha, \beta]$ gleichmässig konvergente Reihe der Form

$$\Sigma\, a_n\, e^{\lambda_n s}$$

Digitized by Google

durch ihre Summe eine in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion dar. Ferner gilt — wie bei den reellen Variablen — der Satz, dass das Integral einer fastperiodischen Funktion wieder fastperiodisch ausfällt, wenn es überhaupt beschränkt bleibt. Neuartig, ohne Analogon bei den reellen Variablen, sind jedoch hier die beiden folgenden Sätze: Der Differentialquotient einer fastperiodischen Funktion ist wieder fastperiodisch, und (was für verschiedene Untersuchungen wesentlich ist) der Quotient $\frac{f(s)}{g(s)}$ zweier fastperiodischen Funktionen ist immer fastperiodisch, wenn der Nenner $g(s)$ nur keine Nullstellen im Streifen besitzt; man braucht also hier nur $g(s) \neq 0$ und nicht $|g(s)| > k > 0$ vorauszusetzen; in der Tat ist es eine charakteristische Eigenschaft einer fastperiodischen Funktion $g(s)$, dass falls sie in (α, β) von 0 verschieden ist, ihr absoluter Betrag $|g(s)|$ von selbst in jedem Teilstreifen eine positive untere Schranke haben muss.

Um zu der Dirichletentwicklung $\Sigma A_n e^{\Lambda_n s}$ einer in (α, β) fastperiodischen Funktion zu gelangen, verfahren wir folgendermassen. Auf jeder festen Geraden $\Re(s) = \sigma$ des Streifens ist $f(\sigma + it) = F_\sigma(t)$ fastperiodisch in t und hat also eine Fourierreihe

$$F_\sigma(t) \sim \Sigma A_n^{(\sigma)} e^{i\Lambda_n^{(\sigma)} t}.$$

Nun lässt sich aber mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes leicht zeigen, 1) dass die Exponenten $\Lambda_n^{(\sigma)}$ von σ unabhängig sind, und 2) dass die Koeffizienten $A_n^{(\sigma)}$ in der »richtigen« Weise von σ abhängen, d. h. $A_n^{(\sigma)} = A_n e^{\Lambda_n \sigma}$, wo A_n eine Konstante ist, d. h. nicht von σ abhängt. Die Fourierreihen auf den kontinuierlich vielen Geraden $\Re(s) = \sigma$ schliessen sich also zu einer einzigen Entwicklung der Form

$$\Sigma A_n e^{\Lambda_n \sigma} \cdot e^{i\Lambda_n t} = \Sigma A_n e^{\Lambda_n s}$$

zusammen, und diese Entwicklung ist es, die wir als die »Dirichletsche Reihe« der Funktion $f(s)$ im Streifen (α, β) bezeichnen.

Im Spezialfalle einer reinperiodischen Funktion (oder, wenn wir zu der z-Ebene zurückkehren, einer Funktion im schlichten Kreisringe $r_1 < |z| < r_2$) geht unsere Dirichletsche Reihe in die gewöhnliche Laurentreihe der Funktion $f(s)$ über.

Aus der Theorie der reellen Variablen überträgt sich

Digitized by Google

unmittelbar der Eindeutigkeitssatz, dass zu zwei verschiedenen in einem gemeinsamen Streifen fastperiodischen Funktionen zwei verschiedene Dirichletsche Reihen gehören, und der Fundamentalsatz (Satz von der Mittelkonvergenz), dass im ganzen Streifen die Parsevalsche Gleichung

$$M\{|f(\sigma + it)|^2\} = \Sigma |A_n|^2 e^{2\Lambda_n \sigma}$$

besteht.

Auch die Rechenregeln für das Operieren mit den Reihenentwicklungen übertragen sich sofort: Die Dirichletentwicklung einer Summe, eines Produktes, einer Grenzfunktion, eines Integrales (falls es beschränkt bleibt) und eines Differentialquotienten entsteht durch formales Rechnen mit den Dirichletreihen der vorgelegten Funktionen.

Der Approximationssatz lässt sich ebenfalls übertragen (allerdings erst nachdem er auf »gleichzeitige« Approximation einer Klasse von fastperiodischen Funktionen $F(t)$ verallgemeinert ist): Damit eine in $[\alpha, \beta]$ analytische Funktion fastperiodisch ist, ist notwendig und hinreichend, dass sie sich gleichmässig in $[\alpha, \beta]$ durch Exponentialpolynome $\sum_1^N a_n e^{\lambda_n s}$ annähern lässt.

Beispiele von Dirichletreihen, die im Streifen $[\alpha, \beta]$ gleichmässig konvergieren, liefern die Fälle linear unabhängiger Exponenten und positiver Koeffizienten. Weitere einfache Beispiele erhalten wir durch den folgenden Satz, der eine Brücke zu der Theorie der gewöhnlichen Dirichletschen Reihen mit sich nicht im Endlichen häufenden Exponentenfolgen schlägt: Falls bei jedem $\delta > 0$ die Reihe

$$\Sigma e^{-|\Lambda_n|\delta}$$

konvergiert, ist die Dirichletentwicklung $\Sigma A_n e^{\Lambda_n s}$ im ganzen Fastperiodizitätsstreifen (α, β) absolut konvergent. Hierunter subsumiert sich die gewöhnliche Laurententwicklung $\Sigma a_n e^{nks}$ reinperiodischer Funktionen. Ich bemerke noch, dass im Falle positiver Koeffizienten der bekannte Vivanti-Landau'sche Satz über Potenzreihen und gewöhnliche Dirichletsche Reihen auch für unsere allgemeinen Dirichletreihen gilt; er besagt hier, dass die beiden reellen Punkte $s = \alpha^*$ und $s = \beta^*$ auf den Begrenzungsgeraden des Maximalstreifens $[\alpha^*, \beta^*]$ immer singuläre Punkte der Funktion sind.

Digitized by Google

Ebenso wie bei den gewöhnlichen Laurentreihen $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ der spezielle Fall lauter positiver (oder lauter negativer) Exponenten, d. h. der Fall einer üblichen Potenzreihe $\sum_{0}^{\infty} a_n z^n$, eine besondere Rolle spielt, so auch hier der Fall, wo die Dirichletexponenten Λ_n unserer fastperiodischen Funktion alle dasselbe Vorzeichen haben. Wir gehen daher zur Betrachtung solcher Funktionen über.

Fastperiodische Funktionen mit lauter positiven Dirichletexponenten.

Man gelangt hier zu Resultaten, die einen fast ebenso abgerundeten Charakter tragen, wie die im klassischen Spezialfalle der eigentlichen Potenzreihen $\sum_{0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{0}^{\infty} a_n e^{ns}$ (nur dass in unserem allgemeinen Falle natürlich keine gewöhnliche Konvergenz stattzufinden braucht). Wir beginnen mit einem wichtigen **Randwertsatz**, dessen Beweis auf dem obigen Approximationssatze basiert, unter Heranziehung des klassischen Phragmén-Lindelöf'schen Prinzips, welches sich bei so manchen funktionentheoretischen Untersuchungen von fundamentaler Bedeutung gezeigt hat.

Es sei

$$F(t) \sim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n t}$$

eine ganz beliebige (d. h. nicht etwa analytisch vorausgesetzte) fastperiodische Funktion mit lauter **positiven Exponenten** Λ_n. Dann ist sie die **Randfunktion** einer in der Halbebene $\sigma < 0$ regulären analytischen Funktion, d. h. es gibt eine in $\sigma < 0$ reguläre, für $\sigma \leqq 0$ stetige Funktion $f(s)$, welche auf der imaginären Achse $\sigma = 0$ der Randbedingung

$$f(it) = F(t)$$

genügt. Und diese Funktion $f(s)$ ist **fastperiodisch** in $(-\infty, 0)$, **strebt für** $\sigma \to -\infty$ **gleichmässig in** t **gegen** 0, und ihre Dirichletentwicklung entsteht aus der Fourierentwicklung von $F(t)$, indem t durch $\sigma + it = s$ ersetzt wird, d. h.

$$f(s) \sim \Sigma A_n e^{\Lambda_n s} .$$

Digitized by Google

Wie wir beiläufig bemerken, folgt aus diesem Randwertsatze das zunächst wohl überraschend erscheinende Resultat über fastperiodische Funktionen einer reellen Variablen, dass eine solche Funktion, falls sie lauter positive (oder lauter negative) Fourierexponenten besitzt, durch ihren Verlauf auf einem beliebig kleinen Intervall schon vollständig bestimmt ist.

Aus diesem allgemeinen Randwertsatz können wir sofort den folgenden Hauptsatz ableiten.

Falls eine in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion $f(s) \sim \Sigma A_n e^{\Lambda_n s}$ lauter positive Dirichletexponenten besitzt, dann ist sie über die ganze linke Halbebene $\sigma \leqq \alpha$ analytisch fortsetzbar, und liefert eine in $[-\infty, \beta]$ fastperiodische Funktion $f(s)$, welche für $\sigma \to -\infty$ gleichmässig in t gegen 0 strebt.

In der Tat brauchen wir nur bei einem festen σ_0 im Intervalle $\alpha < \sigma < \beta$ die fastperiodische Funktion $F(t) = f(\sigma_0 + it)$ zu betrachten. Ihre Fourierreihe ist durch $\Sigma A_n e^{\Lambda_n \sigma_0} e^{i \Lambda_n t}$ gegeben und hat daher lauter positive Exponenten; also ist sie die Randfunktion einer in der ganzen linken Halbebene $\sigma < \sigma_0$ analytischen fastperiodischen Funktion, die aber mit der gegebenen Funktion $f(s)$ zusammenfallen muss, weil sie mit ihr auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$ übereinstimmt.

[Als ein Corollar dieses Satzes führen wir an, dass jede in einem Streifen (α, β) fastperiodische Funktion $f(s) \sim \Sigma A_n e^{\Lambda_n s}$, deren Exponenten Λ_n beschränkt sind, $|\Lambda_n| < K$, eine ganze Transzendente sein muss. Denn $f(s) e^{Ks}$ hat lauter positive Exponenten und ist daher nach links fortsetzbar, und $f(s) e^{-Ks}$ hat lauter negative Exponenten und ist folglich nach rechts fortsetzbar. Solche Funktionen mit beschränkten Exponenten (die aber in einem endlichen Intervall überall dicht liegen können) spielen in unserer Theorie eine ähnliche Rolle wie die Polynome in der Theorie der analytischen Funktionen in schlichten Kreisringen].

Wenn man statt der Voraussetzung »lauter positiver« Exponenten, nur die Voraussetzung lauter nicht-negativer Exponenten macht, also ein konstantes Glied c in der Entwicklung $f(s) \sim \Sigma A_n e^{\Lambda_n s}$ erlaubt, gilt der obige Hauptsatz natürlich ebenso, nur dass $f(s)$ für $\sigma \to -\infty$ gegen eben dieses konstante Glied (statt gerade gegen 0) konvergiert. Andererseits sieht man sofort, dass wenn in der Dirichletentwicklung einer in einer linken Halbe-

Digitized by Google

bene $[-\infty, \beta]$ fastperiodischen Funktion $f(s)$ mindestens ein negativer Exponent Λ_N vorkommt, $f(s)$ für $\sigma \to -\infty$ nicht einmal beschränkt bleiben kann; denn bei festem σ ist ja

$$\text{Obere Grenze}_{-\infty<t<\infty} |f(\sigma+it)| \geqq |M\{f(\sigma+it)e^{-i\Lambda_N t}\}| = |A_N e^{\Lambda_N \sigma}|,$$

wo die rechte Seite wegen $\Lambda_N < 0$, für $\sigma \to -\infty$ gegen ∞ strebt. Also können wir schliessen: Wenn eine in $[-\infty, \beta]$ fastperiodische Funktion für $\sigma \to -\infty$ beschränkt bleibt, muss sie lauter nichtnegative Exponenten haben, und daher sogar einem bestimmten Grenzwerte zustreben. Hieraus folgt aber, dass für eine beliebige in einer Halbebene $[-\infty, \beta]$ fastperiodische Funktion $f(s)$ bei der Annäherung an den unendlich fernen »Punkt« $\sigma = -\infty$ nur dieselben drei Möglichkeiten bestehen, wie nach dem Satze von Weierstrass für eine reinperiodische Funktion, d. h. (wenn wir zur z-Ebene zurückkehren) für eine in einer Umgebung eines Punktes der schlichten Ebene reguläre Funktion:

A) $f(s)$ strebt gegen einen endlichen Grenzwert. (regulärer Fall)

B) $|f(s)|$ strebt gegen ∞. (polarer Fall)

C) die Werte von $f(s)$ liegen in jeder Halbebene $\sigma < \sigma_0$ überall dicht. (wesentlich singulärer Fall).

In der Tat können wir wörtlich wie beim Beweise des Weierstrass'schen Satzes so schliessen: Wenn $f(s)$ nicht dem Falle C angehört, wenn es also eine Zahl a mit $|f(s)-a| > k > 0$ gibt, muss der Fall A oder B vorliegen, weil die Funktion $g(s) = \dfrac{1}{f(s)-a}$ in einer linken Halbebene fastperiodisch und beschränkt ist, und also nach dem obigen einem bestimmten Limes zustreben muss; ist dieser Limes $\neq 0$, trit A, ist er $= 0$, tritt B ein.

Im Falle C gilt, wie aus einem allgemeinen Satz von Iversen leicht gefolgert werden kann, sogar auch der Picardsche Satz, d. h. es nimmt die Funktion $f(s)$ in jeder linken Halbebene alle Werte, bis auf höchstens einen, an.

Wie lässt sich aber an der Reihenentwicklung der Funktion erkennen, ob Fall A, B oder C eintrifft. Die Antwort ist sehr einfach:

a) Das reguläre Verhalten A entspricht dem Falle, wo alle $\Lambda_n \geqq 0$ sind.

b) Das polare Verhalten B entspricht dem Falle, wo es

Digitized by Google

negative Exponenten gibt, und unter ihnen einen numerisch grössten.

c) Das wesentlich singuläre Verhalten C entspricht dem Falle, wo es negative Exponenten gibt, unter ihnen aber keinen grössten. Es gehören also hierher sowohl die Funktionen, deren Exponenten sich gegen $-\infty$ häufen, als auch diejenigen, deren Exponenten sich gegen eine endliche negative Zahl A^* als untere Grenze häufen, die aber nicht selbst zur Menge der A_n gehört. Durch eine verfeinerte Analyse lassen sich jedoch Unterschiede zwischen diesen beiden Klassen von Funktionen aufweisen; so lässt sich zeigen, dass bei einer Funktion $f(s)$ der zweiten Klasse überhaupt kein Picardscher Ausnahmewert vorhanden sein kann, d. h. dass $f(s)$ in jeder linken Halbebene sogar sämtliche Werte annimmt.

Durch die angegebenen Sätze beherrscht man das Verhalten einer in einer linken Halbebene fastperiodischen Funktion bei Annäherung an den Punkt $\sigma = -\infty$ (d. h. bei Annäherung an den Windungspunkt $z = 0$) so genau, dass man sich vielleicht berechtigt fühlen könnte, solche fastperiodische Singularitäten beim systematischen Aufbau der allgemeinen Funktionentheorie als »elementare« Singularitäten an einer frühzeitigen Stelle in die Betrachtungen hineinzuziehen, ebenso wie die algebraischen Singularitäten, die ja speziell darunter enthalten sind.

Nachdem jetzt solche fastperiodische Funktionen besprochen sind, deren Definitionsbereich eine ganze Halbebene ausmacht, kehren wir zur Betrachtung der für einen Streifen definierten fastperiodischen Funktionen zurück. Unser Ziel ist die Behandlung der Frage nach der

Laurenttrennung fastperiodischer Funktionen.

Der klassische Laurentsche Satz für eine in einem schlichten Kreisringe $r_1 < |z| < r_2$ analytische Funktion, oder in unserer Sprechweise für eine in einem Streifen $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ reinperiodische Funktion $f(s)$, besagt, dass $f(s)$ in zwei reinperiodische Summanden

$$f(s) = f_1(s) + f_2(s)$$

zerlegt werden kann, von denen $f_1(s)$ in der linken Halbebene $\sigma < \sigma_2$, und $f_2(s)$ in der rechten Halbebene $\sigma > \sigma_1$ analytisch ist, und $f_1(s)$ und $f_2(s)$ in den »Punkten« $\sigma = -\infty$ bezw. $\sigma = +\infty$

Digitized by Google

noch regulär sind. Nach den vorangehenden Resultaten über fastperiodische Funktionen, deren Exponenten alle dasselbe Vorzeichen haben, könnte es zunächst scheinen, als ob die Laurenttrennung unmittelbar auf eine beliebige in einem Streifen $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ fastperiodische Funktion $f(s) \sim \Sigma A_n e^{\Lambda_n s}$ übertragbar, und zwar einfach dadurch zu erhalten wäre, dass man die beiden Teilreihen

$$\sum_{\Lambda_n > 0} A_n e^{\Lambda_n s} \quad \text{und} \quad \sum_{\Lambda_n < 0} A_n e^{\Lambda_n s}$$

mit lauter positiven bezw. negativen Exponenten bildete, welche dann fastperiodische Funktionen $f_1(s)$ und $f_2(s)$ darstellten, von denen $f_1(s)$ nach links, $f_2(s)$ nach rechts analytisch fortsetzbar wäre. Dies Verfahren ist aber deshalb nicht unmittelbar erlaubt, weil man ja nicht weiss, ob die beiden Teilreihen $\sum_{\Lambda_n > 0}$ und $\sum_{\Lambda_n < 0}$ je für sich Dirichletentwicklungen von fastperiodischen Funktionen sind. Und in der Tat ist es nicht nur dieser Beweisansatz, sondern die Laurenttrennung selbst, welche versagen kann. Durch passend konstruierte Beispiele lässt sich nämlich zeigen, dass tatsächlich fastperiodische Funktionen existieren, welche eine Laurenttrennung nicht zulassen. Dies scheint zunächst recht entmutigend, weil eine Laurenttrennung nicht nur an und für sich von Interesse wäre, sondern vor allem ein kräftiges Mittel zu weiterem Vordringen in die Theorie darböte. Glücklicherweise lässt sich aber durch eine kleine Gedankenwendung dieser Übelstand überwinden. Man kann nämlich zeigen, dass wenn auch eine fastperiodische Funktion $f(s)$ nicht immer selbst eine Laurenttrennung gestattet, so doch immer ihr Differentialquotient $f'(s)$. Dies hat seinen analytischen Grund in der Cauchyschen Darstellung

$$f'(s) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-s)^2} dz,$$

wo die 2te Potenz im Nenner es ermöglicht, den Integrationsweg ins Unendliche zu erstrecken, während so etwas bei der Darstellung von $f(s)$ selbst

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z-s} dz$$

Digitized by Google

im Allgemeinen nicht möglich ist. Auch von rein formalem Gesichtspunkte aus, bei oberflächlicher Betrachtung der Dirichletentwicklungen von $f(s)$ und $f'(s)$, ist es leicht verständlich, dass $f'(s)$ in bezug auf eine Trennung bei $\lambda = 0$ ein viel angenehmeres Verhalten als $f(s)$ selbst aufweist; denn bei dem Übergang von der Reihenentwicklung $\Sigma A_n e^{\lambda_n s}$ für $f(s)$ zu der Entwicklung $\Sigma A_n \lambda_n e^{\lambda_n s}$ für $f'(s)$ treten ja zu den Gliedern $A_n e^{\lambda_n s}$ Faktoren λ_n hinzu, welche gerade in der Nähe von $\lambda = 0$ sehr klein sind.

Mit Hilfe der Laurenttrennung des Differentialquotienten kann man nun tatsächlich in vielen Fällen dasselbe erreichen, was uns eine (nicht immer mögliche) Trennung von $f(s)$ selbst liefern würde. Wir führen z. B. den erweiterten Eindeutigkeitssatz an, welcher besagt, dass falls $f(s)$ in einem Streifen (α, β), und $g(s)$ in einem Streifen (γ, δ) fastperiodisch sind, und die Dirichletentwicklung von $f(s)$ in (α, β) mit der Dirichletentwicklung von $g(s)$ in (γ, δ) formal identisch ist, $f(s)$ und $g(s)$ dieselbe analytische Funktion sind, auch in dem Falle, wo die beiden Streifen ganz ausserhalb einander liegen (etwa $\alpha < \beta < \gamma < \delta$); es gibt dann eine im ganzen Streifen $\alpha < \sigma < \delta$ fastperiodische Funktion, welche in (α, β) mit $f(s)$, in (γ, δ) mit $g(s)$ übereinstimmt. Der Beweis verlaüft ganz parallel dem Beweise des entsprechenden Satzes über gewöhnliche Laurentreihen, nur dass in unserem Falle zunächst durch Laurenttrennung die Identität der Differentialquotienten $f'(s)$ und $g'(s)$ nachgewiesen, und dann nachher durch Integration zu den gegebenen Funktionen $f(s)$ und $g(s)$ selbst übergegangen wird.

Mit diesem Satze will ich den Bericht über meine Arbeit über fastperiodische analytische Funktionen schliessen, und zuletzt nur noch einige Bemerkungen hinzufügen über die

Weiterentwicklung der Theorie der fastperiodischen Funktionen.

Nicht nur bedarf die Theorie natürlich in mancher Hinsicht einer Vertiefung, sondern vor allem drängt sich die Frage nach Verallgemeinerungen auf. In der Tat haben wir uns bei den reellen Variablen auf die Betrachtung stetiger (sogar gleichmässig stetiger) Funktionen beschränkt, und sowohl bei den reellen wie bei den komplexen Variablen war die Fastperiodizitätsforderung so scharf, dass sie von selbst die Be-

Digitized by Google

schränktheit der Funktionen involvierte. Von der Theorie der gewöhnlichen Fourierreihen reinperiodischer Funktionen wissen wir aber, dass auch die Reihenentwicklungen unstetiger Funktionen, und insbesondere solcher, die nur mit Hilfe der neueren Begriffsbildungen behandelt werden können, wie sie vor allem von Lebesgue geschaffen wurden, ein grosses Interesse beanspruchen dürfen; und aus der Theorie der gewöhnlichen Dirichletschen Reihen geht klar hervor, dass die Forderung der Beschränktheit der fastperiodischen analytischen Funktionen gewiss für weitergehende Untersuchungen eine allzu kräftige ist. Verallgemeinerungen des Begriffes der Fastperiodizität und Verallgemeinerungen der Theorie der fastperiodischen Funktionen sind nun in der Tat schon in verschiedener Richtung vorgenommen. In dem Jahre, das seit der Veröffentlichung meiner ersten Abhandlung vergangen ist, habe ich die grosse Freude gehabt, dass verschiedene Mathematiker sich für die Theorie interessiert und sie in durchaus wesentlicher Weise weiterentwickelt haben.

So hat Herr Stepanoff verschiedene interessante Verallgemeinerungen der fastperiodischen Funktionen einer reellen Variablen entwickelt, von denen eine nur die Messbarkeit der Funktionen, eine andere die Integrierbarkeit und eine dritte die quadratische Integrierbarkeit voraussetzt. Für die Funktionen der letzten Klasse konnte Herr Stepanoff zeigen, dass fast alle oben angeführten Sätze über fastperiodische Funktionen auf sie übertragbar sind; naturgemäss macht aber hiervon eine Ausnahme der Approximationssatz, welcher durch seine einfache Angabe notwendiger und hinreichender Bedingungen gerade für die von uns ursprünglich betrachtete Funktionenklasse eigentümlich ist, und die Berechtigung gibt, diese letzte Funktionenklasse als die »natürliche Ausgangsklasse«, und die anderen als »Verallgemeinerungen« zu betrachten.

Die letzt erwähnte Stepanoffsche Verallgemeinerung ist auch, unabhängig von Stepanoff, durch Herrn Norbert Wiener gefunden, der ebenfalls die Theorie dieser Funktionen entwickelt hat. Vor allem aber ist es Herrn Wiener gelungen, mit Hilfe eines verallgemeinerten Stieltjes'schen Integralbegriffes die Theorie der fastperiodischen Funktionen an die Theorie der Fourierintegrale anzuschliessen, und dadurch u. a. einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes zu gewinnen, in welchem die arith-

Digitized by Google

metischen Überlegungen, welche bei meinem Beweis eine wesentliche Rolle spielten, durch rein analytische ersetzt werden.

Ferner hat Herr Bochner die Theorie der fastperiodischen Funktionen auf Funktionen mehrerer Variablen ausgedehnt, wobei die Beziehung der fastperiodischen Funktionen zu den »grenzperiodischen« Funktionen von unendlichvielen Variablen, die schon in meinen Untersuchungen stark hervortritt, noch vertieft wird. Ausserdem hat Herr Bochner die Beweismethoden der Theorie verschiedentlich vereinfacht, und neue interessante Resultate gefunden, von denen ich das folgende besonders schöne erwähnen möchte: Eine stetige Funktion $F(t)$ soll eine Normalfunktion genannt werden, wenn die Funktionenmenge $F(t+k)$ $(-\infty < k < \infty)$ eine »Normalklasse« bildet, in dem Sinne, dass aus jeder Folge

$$F(t+k_1),\ F(t+k_2),\ \ldots,\ F(t+k_n),\ \ldots$$

eine im ganzen Intervalle $-\infty < t < \infty$ gleichmässig konvergente Teilfolge herausgegriffen werden kann. Dann ist, nach Herrn Bochner, dieser Begriff einer Normalfunktion mit meinem Begriff einer fastperiodischen Funktion inhaltlich völlig identisch.

Zum Schluss erwähne ich noch einige sehr interessante Untersuchungen von Herrn Besikovitch, welche teils die fastperiodischen Funktionen einer reellen, teils die einer komplexen Variablen betreffen. Seine Untersuchungen beziehen sich im Wesentlichen auf »generalisiert fastperiodische« Funktionen, worunter Herr Besikovitch solche Funktionen versteht, welche sich im Mittel durch gewöhnliche fastperiodische Funktionen approximieren lassen. Diese generalisiert fastperiodischen Funktionen zeigen sich von grosser Bedeutung sowohl bei den komplexen Variablen — wo eine gewöhnliche fastperiodische Funktion $f(s)$ im Allgemeinen über den Maximalstreifen (α^*, β^*) hinaus noch generalisiert fastperiodisch bleibt — als auch bei den reellen Variablen, wo es Herrn Besikovitch gelungen ist, den folgenden fundamentalen Satz zu beweisen: Zu jeder generalisiert fastperiodischen Funktion $F(t)$ gehört eine »Fourierreihe« $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n t}$, welche im Mittel gegen $F(t)$ konvergiert, d. h. für welche die Parsevalsche Gleichung

$$M\{|F(t)|^2\} = \Sigma |A_n|^2$$

Digitized by Google

besteht, und umgekehrt ist jede beliebig hingeschriebene Reihe der Form $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n t}$ mit konvergenter Quadratsumme $\Sigma |A_n|^2$ die Fourierreihe einer generalisiert fastperiodischen Funktion. Hiermit ist also das Analogon zu dem Riesz-Fischer'schen Satze gefunden.

Digitized by Google

ÜBER DISKONTINUIERLICHE GRUPPEN UND AUTOMORPHE FUNKTIONEN VON MEHREREN VARIABLEN

VON

P. J. MYRBERG

Die automorphen Funktionen können allgemein als analytische Funktionen definiert werden, die in bezug auf eine diskontinuierliche Gruppe irgendwelcher umkehrbar eindeutiger Transformationen ungeändert bleiben. Man betrachtet in erster Linie umkehrbar rationale oder sog. *Cremonatransformationen.* Als erste Aufgabe der allgemeinen Theorie hat man dann alle diejenigen Cremonagruppen zu finden, die automorphe Funktionen besitzen, und die Eigenschaften dieser Funktionen zu studieren.

Bekanntlich ist die lineare Transformation die einzige umkehrbar rationale Transformation einer komplexen Variablen. Im Falle zweier und mehrerer Variablen gibt es dagegen Cremonatransformationen von beliebig hoher Ordnung. Die Untersuchung der allgemeinsten Cremonagruppen würde gegenwärtig noch auf unüberwindliche Schwierigkeiten stossen. Man hat sich deshalb beschränkt auf eine gewisse spezielle, wenn auch sehr umfassende Klasse von Cremonasubstitutionen, nämlich solche, die zu einer endlichen kontinuierlichen Gruppe gehören und deren Grad somit eine endliche obere Grenze hat. Die fraglichen Gruppen, welche als eine nächste Verallgemeinerung der Kollineationsgruppen angesehen werden können, gestatten stets eine projektive Abbildung; es ist m. a. W. stets möglich, eine solche Gruppe vermittels einer umkehrbar rationalen Substitution in eine projektive Gruppe eines im allgemeinen höheren Raumes überzuführen, wodurch die Geometrie des ursprüng-

Digitized by Google

lichen Cremonaraumes eine Interpretation als projektive Geometrie auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit bekommt. Wegen dieses Umstandes ist es uns erlaubt, in dem geometrisch-gruppentheoretischen Teil unserer Betrachtungen uns auf die projektiven Gruppen zu beschränken.

Wir beginnen mit einigen elementaren Bemerkungen.
Wir bezeichnen mit

(1) $$y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$$

komplexe Variable, welche homogene Punktkoordinaten in einem $2n$-dimensionalen Raum R_n repräsentieren. Die projektiven Substitutionen werden in der homogenen Form

(2) $$y_i' = \sum_{\varkappa=1}^{n+1} \alpha_{i,\varkappa}\, y_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

geschrieben, wo die Koeffizienten $\alpha_{i,\varkappa}$ nur bis auf einen gemeinsamen von Null verschiedenen Faktor bestimmt sind. Jede projektive Substitution deuten wir geometrisch als eine Kollineation des Raumes R_n in sich an.

Es sei nun

3) $$S_1, S_2, S_3, \ldots$$

eine unendliche Folge von projektiven Substitutionen. Wir sagen, dass die gegebene Folge eine *Normalfolge* ist, wenn die Koeffizienten der Substitutionen gegen bestimmte endliche Grenzwerte konvergieren, die nicht alle gleich Null sind.

Es sei

(4) $$y_i' = \sum_{\varkappa=1}^{n+1} \beta_{i,\varkappa}\, y_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

der Ausdruck der Grenzsubstitution der Folge (3). Ist die Determinante

(5) $$|\beta_{i,\varkappa}|$$

von Null verschieden, so konvergiert die Folge

$$S_\nu^{-1} S_{\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

offenbar gegen die identische Substitution. Wir nehmen zweitens

Digitized by Google

an, dass (5) gleich Null ist. Es sei ϱ der Rang von (5). Das Gleichungssystem (4) definiert dann in Parameterform eine lineare Mannigfaltigkeit $M_{\varrho-1}$ von der Dimension $2\,\varrho-1$). Ferner definiert das Gleichungssystem

$$(6) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n+1} \beta_{i,\varkappa}\, y_\varkappa = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

eine lineare Mannigfaltigkeit $\overline{M}_{n-\varrho}$ von der Dimension $2(n-\varrho)$. Wir nennen $M_{\varrho-1}$ und $\overline{M}_{n-\varrho}$ das *erste* bzw. *zweite Element* der Normalfolge (3) vom Rang ϱ. Die geometrische Bedeutung der Elemente geht aus den folgenden Sätzen hervor.

Es sei (μ) eine beliebige abgeschlossene Punktmenge, die keinen Punkt von $\overline{M}_{n-\varrho}$ enthält. Bei Ausführung der Substitutionen der Normalfolge (3) konvergieren die Punkte von (μ) gleichmässig gegen Punkte, welche auf $M_{\varrho-1}$ gelegen sind.

Es sei ferner

$$(7) \quad \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) \equiv \sum C_{\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{n+1}}\, y_1^{\lambda_1}\, y_2^{\lambda_2} \ldots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} = 0$$

eine algebraische Mannigfaltigkeit, die das erste Element $M_{\varrho-1}$ nicht als ganzes enthält. Bei Ausführung der inversen Substitutionen von (3) konvergieren die Transformierten von (7) gegen ein Grenzgebilde, dessen Gleichung in einem geeigneten Koordinatensystem die Gestalt

$$(8) \qquad \overline{\varphi}(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_\varrho) = 0$$

hat. Dieses Gebilde, welches das zweite Element von (3) als ganzes enthält, ist von dem Schnitt des Anfangsgebildes und des ersten Elementes allein abhängig.

Ist speziell der Rang von (3) gleich Eins, so reduziert sich (8) auf die ein- oder mehrfach zu zählende Hyperebene $\overline{M}_{n-1}$.

Die Untersuchung der Häufung der räumlich ausgedehnten Punktgebilde ist hier natürlich, weil bekanntlich die Niveaugebilde und die Singularitäten analytischer Funktionen von mehreren Variablen keine isolierten Punkte, sondern kontinuierliche Gebilde sind.

Indem wir jetzt zur Betrachtung von *Gruppen* linearer Substitutionen übergehen, nehmen wir zunächst an, dass unsere

Digitized by Google

Gruppe Γ keine infinitesimalen Substitutionen enthält, d. h. dass keine unendliche Folge existiert, deren Substitutionen gegen die identische Substitution konvergieren. Diese Bedingung ist jedoch für die funktionentheoretische Anwendbarkeit der Gruppe nicht hinreichend. Im Falle einer komplexen Variablen unterscheidet man zwischen Gruppen, die in der komplexen Ebene eigentlich diskontinuierlich sind, und Gruppen, die jene Eigenschaft nicht besitzen. Nur die erstgenannten Gruppen haben automorphe Funktionen. Diese Begriffe können unmittelbar auf höhere Räume übertragen werden, man erhält jedoch in dieser Weise keine Analogie mit dem Fall einer Variablen. In einer Abhandlung die demnächst in *Acta mathematica* erscheinen wird, habe ich einen neuen Diskontinuitätsbegriff eingeführt, welcher zu funktionentheoretischen Zwecken mehr geeignet ist.

Wir betrachten die Menge $(\overline{M})$ aller zweiten Elemente von sämtlichen Normalfolgen der gegebenen Gruppe Γ. Wir sagen, dass unsere Gruppe Γ im Raume R_n *normal diskontinuierlich* ist, wenn es Punkte in R_n gibt, welche keinem der Elemente von $(\overline{M})$ angehören. Die genannten Punkte bilden dann einen Bereich (der aus mehreren Stücken bestehen kann), der im Folgenden *Normalbereich der Gruppe* genannt wird.

Im niedrigsten Falle $n = 1$ ist die normale Diskontinuität identisch mit der eigentlichen Diskontinuität der Gruppe. Dies ist für $n > 1$ nicht der Fall. Man kann nämlich zeigen, dass jede Gruppe in ihrem Normalbereich eigentlich diskontinuierlich ist, diese Diskontinuität findet jedoch im allgemeinen noch ausserhalb des Normalbereichs der Gruppe statt.

Um normal diskontinuierliche Gruppen wirklich zu konstruieren, gehen wir von den abgeschlossenen Bereichen D aus, die der folgenden Bedingung genügen:

Bedingung (A): Es gibt im Raum R_n ein System von $n + 1$ Hyperebenen, die keinen gemeinsamen Punkt haben und die keinen inneren Punkt von D enthalten.

Dann gilt der

Satz. Jede Gruppe linearer Substitutionen, die den Bereich D in sich selbst überführen, ist in demselben normal diskontinuierlich, sobald keine infinitesimalen Substitutionen vorhanden sind.

Mit Hilfe des obigen Satzes ist es möglich, in den meisten bekannten Fällen die normale Diskontinuität der Gruppe unmittelbar nachzuweisen.

Digitized by Google

Unsere Bedingung (A) ist u. a. stets dann erfüllt, wenn es einen endlichen Bereich gibt, der in bezug auf die Gruppe invariant ist. Hieraus folgt schon ohne weiteres die normale Diskontinuität der fuchsschen, hyperfuchsschen und hyperabelschen Gruppen und ihrer bekannten Verallgemeinerungen.

Wir betrachten ferner eine reelle Form

$$(9) \qquad \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) = \Sigma C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n+1}} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \ldots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}}$$

beliebiger Ordnung und die Gesamtheit der reellen Tangentenhyperebenen des Gebildes

$$(10) \qquad \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) = 0,$$

welche Hyperebenen als Träger ihrer reellen und komplexen Punkte $(2n-2)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten sind. Wir nehmen an, dass es Punkte im Raume R_n gibt, die keiner der Tangentenhyperebenen von (10) angehören. Die genannten Punkte bilden dann einen Bereich D, der im allgemeinen unserer Bedingung (A) genügt. In der Tat findet eine Ausnahme nur dann statt, wenn sämtliche Tangentenhyperebenen von (10) einen gemeinsamen Punkt haben (Kegelgebilde).

Es sei nun Γ eine Gruppe reeller linearer Substitutionen, welche die Form (9) bis auf einen Faktor ungeändert lassen. Durch jede Substitution von Γ wird offenbar der Bereich D in sich selbst transformiert. Infolge des obigen Satzes muss die Gruppe Γ im Bereich D normal diskontinuierlich sein, sobald sie keine infinitesimalen Substitutionen enthält.

Das obige Resultat lässt sich unmittelbar auf die komplexen Substitutionsgruppen übertragen, wenn man die gewöhnlichen Formen durch Formen mit konjugiert imaginären Variablen oder sog. Hermitesche Formen ersetzt.

Die einfachste Anwendung der obigen Ergebnisse findet man in der Theorie der quadratischen Formen.

Wir nehmen zuerst an, dass (9) eine reelle quadratische Form ist. Man findet leicht, dass der Bereich D nur bei den Formen der Charakteristik $q = 1$ und $q = 2$, d. h. bei Formen des Typus

$$(11) \qquad \varphi = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2 + y_n^2 - y_{n+1}^2$$
$$\varphi = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2 - y_n^2 - y_{n+1}^2$$

existiert. Im ersten Falle besteht D für $n > 2$ aus dem zusammen-

Digitized by Google

hängenden Bereich

(12)
$$y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 + \ldots + y_n\bar{y}_n - y_{n+1}\bar{y}_{n+1} < |y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 - y_{n+1}^2|,$$

für $n = 2$ aus dem Bereich

(12)′
$$y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 - y_3\bar{y}_3 \gtrless |y_1^2 + y_2^2 - y_3^2|,$$

der aus drei getrennten Teilen zusammengesetzt ist. Im zweiten Falle hat man statt (12) und (12)′ für $n > 3$ bzw. $n = 3$ die Bereiche

(13)
$$y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 + \ldots + y_{n-1}\bar{y}_{n-1} - y_n\bar{y}_n - y_{n+1}\bar{y}_{n+1} < - |y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2 - y_n^2 - y_{n+1}^2|$$

und

13)′
$$(y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 - y_3\bar{y}_3 - y_4\bar{y}_4)^2 > |y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2|^2,$$

von denen der erstere zusammenhängend ist, während der letztere aus drei Teilen besteht.

Für die quadratischen Hermiteschen Formen existiert der Bereich D nur für $p = 1$, d. h. bei den Formen des Typus

(14)
$$y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 + \ldots + y_n\bar{y}_n - y_{n+1}\bar{y}_{n+1};$$

derselbe wird definiert für $n = 1$ durch

(15)
$$y_1\bar{y}_1 - y_2\bar{y}_2 \gtrless 0,$$

für $n > 1$ durch

(15)′
$$y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 + \ldots + y_n\bar{y}_n - y_{n+1}\bar{y}_{n+1} < 0.$$

Die zugehörigen Gruppen sind die fuchsschen bzw. die hyperfuchsschen Gruppen.

Wir betrachten ferner die Gruppen von reellen Substitutionen, welche die rationale Normalkurve C_n

$$\left\| \begin{matrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_2 & y_3 & \ldots & y_{n+1} \end{matrix} \right\| = 0$$

invariant lassen. Wir bilden hier die Gesamtheit der reellen Schmiegungshyperebenen der Kurve C_n. Die Gesamtheit der reellen und komplexen Punkte jener Hyperebenen bildet eine $(2n-1)$-dimensionale algebraische Mannigfaltigkeit, welche den betreffenden $2n$-dimensionalen Raum in $n+1$ Teile zerlegt.

Digitized by Google

Jeder dieser Teilräume genügt unserer Bedingung (A). Nach dem obigen Satz ist daher jede Gruppe reeller linearer Substitutionen, welche die Kurve C_n invariant lassen, ausserhalb der reellen Schmiegungshyperebenen jener Kurve normal diskontinuierlich, sobald es keine infinitesimalen Substitutionen gibt.

Wir haben im Vorhergehenden bei der Bildung normal diskontinuierlicher Gruppen von invarianten Mannigfaltigkeiten Gebrauch gemacht. Man kann jedoch auch die Existenz von normal diskontinuierlichen Gruppen nachweisen, die keine Invarianten besitzen.

Wir gehen zu diesem Zweck von einer endlichen Anzahl von Polyedern P_ν mit den Seitenhyperebenen

$$(16) \qquad Y_i^{(\nu)} \equiv \sum_{\varkappa=1}^{n+1} a_{i,\varkappa}^{(\nu)} y_\varkappa = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n+1 \\ \nu = 1, 2, \ldots, q \end{pmatrix}$$

aus. Jedem Polyeder ordnen wir je eine lineare Substitution S_ν zu, die das betreffende Polyeder zum Fundamentalgebilde hat. Es sei allgemein

$$(17) \qquad Y_i^{(\nu)\prime} = \omega_i^{(\nu)}\, Y_i^{(\nu)}$$

der Ausdruck der zu P_ν gehörigen Substitution, wo

$$|\omega_1^{(\nu)}| < |\omega_2^{(\nu)}| \leqq \ldots \leqq |\omega_n^{(\nu)}| < |\omega_{n+1}^{(\nu)}|.$$

Wir nehmen an, dass keine der Hyperebenen (16) Punkte enthält, die Eckpunkte der anderen Polyeder sind. Werden die Grössen

$$|\omega_1^{(\nu)}| : |\omega_2^{(\nu)}|\,;\ |\omega_n^{(\nu)}| : |\omega_{n+1}^{(\nu)}| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, q)$$

für jede Substitution hinreichend klein gewählt, so wird die von den Substitutionen (17) erzeugte Gruppe normal diskontinuierlich in einem Bereich, der alle Punkte von R_n enthält, bis auf die Punkte einer gewissen diskreten Menge von Hyperebenen. Wir haben hier die ersten Beispiele von allgemeinen normal diskontinuierlichen Gruppen, bei denen keine invarianten Mannigfaltigkeiten vorhanden sind.

Indem wir jetzt zur funktionentheoretischen Seite unserer Betrachtungen übergehen, fragen wir nach der Existenz der auto-

Digitized by Google

morphen, d. h. in bezug auf die oben definierten Cremonagruppen invarianten analytischen Funktionen. Wir machen dabei Gebrauch von inhomogenen Variablen und setzen

$$(18) \qquad y_i : y_{n+1} = x_i, \; y_i' : y'_{n+1} = x_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Man hat in der Theorie der automorphen Funktionen einer Variablen den einfachen Satz, dass jede in der komplexen Ebene eigentlich diskontinuierliche Gruppe automorphe Funktionen besitzt, die in dem Diskontinuitätsbereich meromorph sind. Es gibt keinen analogen allgemeingültigen Satz für die Funktionen von zwei und mehreren Variablen. In der Tat zeigt uns schon das Beispiel der Abelschen Funktionen, dass eine Gruppe normal diskontinuierlich sein kann, ohne automorphe Funktionen zu besitzen. Man hat im vorliegenden Falle noch gewisse arithmetische Bedingungen zu berücksichtigen, nämlich die Riemannschen bilinearen Relationen zwischen den Perioden.

Wenn es auch demnach nicht möglich ist, die Analogie zwischen den beiden Fällen allgemein zu bewahren, so gelingt dies doch unter gewissen sehr allgemeinen Bedingungen.

Wir sagen dass unsere Cremonagruppe G, die keine infinitesimale Substitution enthält, der Bedingung (A') genügt, wenn es einen Bereich D gibt derart, dass die Transformierten von D vermittels G_i von endlich vielen derselben abgesehen, in einem endlichen Bereich W liegen.

Unsere neue Bedingung setzt etwas mehr als die frühere Bedingung (*A*) voraus. Jedenfalls ist *G* somit im Bereich *D* normal diskontinuierlich.

Um die Existenz automorpher Funktionen nachzuweisen, bilden wir die Poincarésche Reihe

$$(19) \qquad \Sigma H(x_1', x_2' \ldots, x_n') \left\{ \frac{\partial(x_1', x_2', \ldots, x_n')}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right\}^m,$$

wo *H* eine rationale Funktion bezeichnet, die im Bereich *W* endlich ist. Unter der Bedingung (*A'*) konvergiert die Reihe (19) für $m \geq 2$ gleichmässig und absolut (wenigstens nachdem endlich viele Glieder fortgelassen sind) in jedem abgeschlossenen Bereich, der im Innern von *D* liegt. Solche Reihen definieren automorphe θ-Funktionen, die meromorph im Bereich *D* sind. Die Quotienten zweier θ-Funktionen einer und derselben Ordnung *m* stellen automorphe Funktionen unserer Cremonagruppe

Digitized by Google

dar, welche im Bereich D den Charakter rationaler Funktionen besitzen.

Unsere Bedingung (A') ist im allgemeinen dann erfüllt, wenn es einen endlichen Bereich D gibt, der in bezug auf jede Substitution der Gruppe invariant ist. Die bisherigen Untersuchungen über die allgemeine Theorie der automorphen Funktionen von mehreren Variablen, namentlich diejenigen von *Fubini*[1]) und *Giraud*[2]), beziehen sich hauptsächlich auf den vorliegenden Fall. Um die Existenz automorpher Funktionen nachzuweisen, hat man mehrere Annahmen gemacht, die sich u. a. auf die Funktionaldeterminanten der Substitutionen der Gruppe beziehen. Unsere Betrachtungen führen zu einer möglichst weitgehenden Vereinfachung der fraglichen Resultate, indem nach dem Vorhergehenden für die Existenz der automorphen Funktionen im vorliegenden Falle im allgemeinen nichts anderes verlangt wird, als dass die Gruppe keine infinitesimalen Substitutionen enthält. Aus diesem Ergebnis folgt unmittelbar z. B. die Existenz der fuchsschen, hyperfuchsschen und hyperabelschen Funktionen und der bekannten Verallgemeinerungen derselben.

Welches ist nun der Zusammenhang zwischen dem wahren Existenzbereich der automorphen Funktionen der Gruppe G und dem Normalbereich dieser Gruppe?

Man kann zunächst zeigen, dass die durch die Reihen (19) definierten Funktionen in jedem abgeschlossenen Bereich, der nur endlich viele Transformierte des durch Nullsetzen des Nenners von H erhaltenen algebraischen Gebildes enthält, meromorph sind. Jene Transformierten sind im allgemeinen algebraische Unstetigkeitsgebilde für die Funktionen. Die Häufungsstellen jener Transformierten sind dann wesentliche Singularitäten für die vermittels der Poincaréschen Reihen gebildeten Transzendenten. Jene Häufungsstellen enthalten, wie man zeigen kann, im allgemeinen die Gesamtheit der Randpunkte des Normalbereichs der Gruppe.

Die analytische Fortsetzung der durch die Poincaréschen Reihen definierten Funktionen ist daher über die Begrenzung des Normalbereichs hinaus im allgemeinen nicht möglich.

---

[1]) *Fubini, G.: Introduzione alla teoria dei gruppi descontinui e delle fungioni automorfe,* Pisa (1908).

[2]) *Giraud, G.: Leçons sur les fonctions automophes,* Paris (1920).

Digitized by Google

Nun gibt es eine wichtige Klasse von Gruppen, deren Normalbereich identisch mit dem wahren Existenzbereich der automorphen Funktionen ist. Diese Eigenschaft kommt allen Gruppen zu, deren sämtliche Normalfolgen vom Rang Eins sind. Die wesentlichen Singularitäten dieser Funktionen, zu denen u. a. die automorphen Funktionen einer Variabeln, ferner die hyperfuchsschen Funktionen gehören, sind von der Gruppe allein, nicht von der rationalen Funktion H abhängig. Dies ist im allgemeinen nicht mit den anderen automorphen Funktionen der Fall, die wesentliche Singularitäten auch im Normalbereich haben, welche Singularitäten mit H variieren.

Eine neue Anwendung unserer geometrisch-gruppentheoretischen Betrachtungen findet man in der Formentheorie.

Wir gehen von der Form

$$\varphi = \Sigma Z_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n+1}} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \ldots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} \tag{20}$$

der Ordnung p aus, deren Koeffizienten unbestimmte Parameter sind, die wir als homogene Punktkoordinaten in einem Raum $R(z)$ repräsentieren. Jeder linearen Substitution

$$y_i' = \sum_{\varkappa=1}^{n+1} a_{i,\varkappa}\, y_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1) \tag{21}$$

der Variablen (y) entspricht eine lineare Substitution der Variablen (z):

$$z_\mu' = \sum_{\nu=1}^{N+1} c_{\mu,\nu}\, z_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, N+1), \tag{22}$$

deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen der Koeffizienten der ersten Substitution sind. Jeder Gruppe Γ der Substitutionen (21) entspricht eine isomorphe Gruppe $\Gamma(\varphi)$ der Substitutionen (22).

Wir nehmen nun an, dass die Ordnung p der Form (20) für $n > 1$ eine gerade Zahl ist. Es gibt dann im Raume $R(z)$ einen Bereich $B(p, n)$, wo jede mit einer reellen Gruppen Γ gebildete Gruppe $\Gamma(\varphi)$ normal diskontinuierlich ist, sobald Γ keine infinitesimalen Substitutionen enthält.

Um den Bereich $B(p, n)$ zu bestimmen, gehen wir von dem Gleichungssystem

Digitized by Google

$$(23) \qquad Z_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n+1}} = (\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n+1})\, u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \ldots u_{n+1}^{\lambda_{n+1}}$$

aus, wo $(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n+1})$ den Koeffizienten von $u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \ldots u_{n+1}^{\lambda_{n+1}}$ in der Entwicklung von $(u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1})^p$ bezeichnet. Die Gleichungen (23) definieren ein algebraisches Gebilde im Raume $R(z)$, welches in bezug auf jede Substitution (22) invariant ist. Jede Gleichung

$$(24) \qquad \Sigma Z_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n+1}} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \ldots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} = 0$$

stellt bei konstanten Werten von (y) eine Schmiegungshyperebene von (23) dar.

Wir betrachten nun die Gesamtheit der reellen Hyperebenen (24) als Träger sowohl ihrer reellen als ihrer komplexen Punkte. Es gibt (bei geradem p für $n > 1$) stets Punkte, die ausserhalb aller genannten Hyperebenen liegen. Ihre Gesamtheit bildet einen Bereich, der aus mehreren Stücken bestehen kann. Dieser Bereich ist der gesuchte Bereich $B(p, n)$.

Es lässt sich zeigen, dass die den reellen definiten Formen entsprechenden Punkte (z) im Innern von $B(p, n)$ liegen, während die den reellen indefiniten Formen zugeordneten Punkte Randpunkte von $B(p, n)$ sind.

Es gibt Gruppen Γ, für welche der Bereich $B(p, n)$ identisch mit dem Normalbereich von $\Gamma(\varphi)$ ist, z. B. die Gruppe Γ_n aller unimodularen ganzzahligen Substitutionen (21).

Wir fragen jetzt nach der Existenz der automorphen Funktionen bei unseren Gruppen $\Gamma(\varphi)$. Der Kürze halber beschränken wir uns auf die oben genannte Modulgruppe Γ_n. Statt der Poincaréschen Reihen, die hier weniger geeignet sind, machen wir hier Gebrauch von den Direchletschen Reihen

$$(25) \qquad J(z) = \sum_{y=-\infty}^{+\infty\,\prime} \left\{ \Sigma Z_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n+1}} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \ldots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} \right\}^{-s}$$

wo $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ alle ganzen Wertkombinationen annehmen, ohne jedoch gleichzeitig zu verschwinden.

Man kann vermittels einfacher geometrischer Betrachtungen nachweisen, dass die Reihe (25) für $s > \frac{n+1}{p}$ absolut und gleichmässig in jedem abgeschlossenen Bereich konvergiert, der im Innern des Bereichs $B(p, n)$ gelegen ist. Die Reihen (25)

Digitized by Google

stellen dann analytische Funktionen dar, die im Bereich $B(p, n)$ regulär und in bezug auf die Gruppe $\Gamma_n(\varphi)$ invariant sind. Wir haben hier eine Klasse automorpher Formen, die analytische Invarianten unserer Form φ sind, indem sie ungeändert bleiben, wenn die Form φ durch eine beliebige arithmetisch äquivalente Form ersetzt wird. Die Reihen (25) sind für $p = 2$, $n = 1$, d. h. für die binären quadratischen Formen von *Poincaré* untersucht worden[1]).

Wir betrachten einige Beispiele.

Für $n = 2$ ist (20) eine binäre Form, und das Gleichungssystem (23) stellt die rationale Normalkurve C_p dar. Die reellen Schmiegungshyperebenen von C_p teilen den betreffenden Raum $R_p(z)$ in $p + 1$ Teile. Jede Reihe (25) definiert daher gleichzeitig $p + 1$ analytische Funktionen.

Für $p = 2$, $n > 2$ ist (23) eine Hyperfläche der Ordnung 2^{n-1}, in dem niedrigsten Falle $n = 3$ die Veronesesche Fläche. Hier ist der Bereich $B(p, n)$ stets zusammenhängend. Jede Reihe (25) definiert also eine einzige analytische Funktion.

Die obigen Betrachtungen können unmittelbar auf die Gruppen von komplexen linearen Substitutionen angewandt werden, wenn man die gewöhnlichen Formen durch Formen mit konjugiert imaginären Variablen ersetzt.

---

[1]) *Poincaré, H.: Sur les invariants arithmétiques,* Journal für Mathematik, Bd. 129 (1905).

Digitized by Google

IMPOSSIBILITÉ DE RESSERRER L'INÉGALITÉ DE MARKOW DANS LE CAS GÉNÉRAL

PAR

RAGNAR FRISCH

Dans son intéressante conférence d'hier, M. Guldberg ayant fait mention des tentatives faites pour resserrer l'inégalité de Markow, a énoncé la supposition que ces tentatives devraient rester vaines tant que l'on ne fait pas des hypothéses spéciales sur la nature de la distribution considérée. Je me permets de démontrer que la supposition de M. Guldberg est exacte.

Le lemme de Markow est en général énoncé de la façon suivante:

Considérons une variable fortuite x qui peut assumer une des valeurs positives $0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n$ avec les probabilités $p_1 p_2 \ldots p_n$ $\left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu = 1\right)$.

Soit $M = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu p_\nu$ l'espérance mathématique de x; t un nombre positif quelconque supérieur à l'unité, P la probabilité pour que la variable fortuite assume une valeur $x \leqq tM$

Alors on a pour P la limite inférieure

$$P > 1 - \frac{1}{t}.$$

Il est visible que pour les valeurs de $t \geqq \frac{x_n}{M}$ il sera toujours possible de resserrer cette inégalité. Dans ce cas trivial on a $P = 1$ et l'on pourra évidemment désigner une infinité de limites inférieures pour P qui seront supérieures à $1 - \frac{1}{t}$.

Ecartons donc ce cas.

Digitized by Google

Pour traiter le cas général nous énonçons la proposition de Markow sous une forme qui diffère un peu de l'ènoncé ci-dessus, mais qui est en réalité équivalente à celle-là.

Soit t un nombre positif quelconque supérieur à l'unité.

Les x étant rangés suivant leurs valeurs absolues $0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n$ soit l l'indice défini par les relations

$$x_l \leqq t\,M < x_{l+1}$$

alors on a toujours

$$t \sum_{\nu=l+1}^{n} p_\nu < 1.$$

S'il était possible de désigner pour P une limite inférieure qui était supérieure à $1 - \frac{1}{t}$ on en déduira pour $\sum_{\nu=l+1}^{n} p_\nu$ une inégalité de la forme

$$t \sum_{\nu=l+1}^{n} p_\nu < 1 - \delta(t) \tag{1}$$

ou δ sera une fonction de t qui pour $t > 1$ aura une valeur positive (non nulle) inférieure à l'unité.

Il est facile de reconnaître que si l'on se donne une valeur quelconque de t $\left(> 1 \text{ et} < \frac{x_n}{M}\right)$ on pourra toujours quelle que soit la valeur correspodante de δ (> 0 et < 1), trouver des lois de distribution $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \ldots x_n \\ p_1 & p_2 \ldots p_n \end{pmatrix}$ qui ne satisfont pas à l'inégalité (1), mais pour lesquelles on a au contraire

$$t \sum_{\nu=l+1}^{n} p_\nu > 1 - \delta. \tag{2}$$

On en trouve déjà une infinité parmi les lois de distribution de troisième ordre.

Considérons en effet une loi de distribution $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$ telle que

$$\frac{1-\delta}{p_3} < t < \frac{x_3}{x_2} < \frac{1-p_2}{p_3}$$
$$x_1 = \frac{(1-p_2)x_2 - p_3 x_3}{p_1}. \tag{3}$$

Digitized by Google

On peut toujours, et cela d'une infinité de manières, choisir des valeurs positives (non nulles) des x et des p qui satisfont aux relations (3) et telles en outre que

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$
$$0 < x_1 < x_2 < x_3 .$$

On pourra commencer par s'assurer que les inégalités

$$\frac{1-\delta}{p_3} < t < \frac{1-p_2}{p_3}$$

étaient satisfaites. Pour cela on pourra par exemple choisir

$$p_3 = \frac{1-\frac{\delta}{2}}{t}$$
$$p_2 = \frac{\delta}{3t}$$
$$p_1 = \frac{t-1+\frac{\delta}{6}}{t} .$$

Ces valeurs des p sont bien positives (non nulles) et leur somme est égale à l'unité.

Si l'on choisit ensuite

x_2 un nombre positif quelconque

$\frac{x_3}{x_2}$ un nombre positif entre t et $\frac{1-p_2}{p_3}$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{p_3}{p_1}\left(\frac{1-p_2}{p_3} - \frac{x_3}{x_2}\right) = 1 - \frac{p_3}{p_1}\left(\frac{x_3}{x_2} - 1\right)$$

on aura satisfait aux relations (3) et l'on aura en outre

$$0 < x_1 < x_2 < x_3$$

de façon que $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$ définisse bien une distribution qui satisfait aux conditions exigées par la proposition de Markow.

Dans cette distribution on a

$$x_2 < tM < x_3$$

d'où

$$l = 2$$

et

$$t \sum_{\nu=l+1}^{n} p_\nu = t p_3 > 1 - \delta .$$

Digitized by Google

L'inégalité (2) est donc satisfaite.

Cela montre qu'il est impossible de resserrer l'inégalité de Markow tant que l'on ne fait pas des hypothèses spéciales sur la nature de la distribution.

Si $\delta = 0$ on retombe sur le lemme de Markow. Dans ce cas il sera donc impossible de satisfaire à l'inégalité (2). On voit aussi directement que dans ce cas il n'est pas possible de choisir les nombres x et p ci-dessus, de telle façon que les relations (3) soient satisfaites. Il n'existe par exemple aucun nombre positif p_2 tel que $1 < 1 - p_2$.

Digitized by Google

ÜBER DIE DICHTE DER GITTERPUNKTE IN ASYMPTOTISCHEN UMGEBUNGEN GEWISSER UNENDLICHER KURVENZWEIGE

VON

TH. SKOLEM

In einer Abhandlung in Kristiania Vid. selskaps skrifter (I, 1921, Nr. 17), worin ich vereinfachte Beweise der Sätze von *Hilbert* (Journal f. Math. 110) über die Irreduzibilität ganzer rationaler Funktionen gegeben habe, benutzte ich einige Sätze über die Verteilung ganzzahliger Lösungen gewisser Gleichungen. U. a. habe ich dort folgenden Satz bewiesen:

Es seien γ und n ganze positive Zahlen und die Reihe

$$\Sigma \alpha_r x^{\frac{n-r}{\gamma}}$$

konvergent für hinreichend grosse x. Die ganzen Zahlen x, für welche diese Reihe einen ganzen Wert erhält, besitzen dann in der Zahlenreihe die durchschnittliche Dichte 0, wenn die Reihe nicht ein Polynom mit rationalen Koeffizienten ist.

Ich benutzte damals funktionentheoretische Betrachtungen; bald wurde ich aber darauf aufmerksam, dass derartige Sätze weit einfacher beweisbar sind und zwar so, dass man nicht nur die Gitterpunkte auf einer Kurve, sondern in Streifen, deren Höhe im Unendlichen gegen 0 abnimmt, betrachten kann. Die hierdurch erhaltenen Sätze stehen mit den Untersuchungen über die Verteilung von Zahlen mod. 1 in nahem Zusammenhang, worüber ich zum Schlusse eine Bemerkung habe.

Definition 1: Unter der Dichte einer gewissen Menge ganzer Zahlen x innerhalb eines Intervalles von der Länge l, verstehe ich den Quotienten

$$\frac{n}{l},$$

Digitized by Google

wobei n die Zahl der vorkommenden Zahlen x im Intervall bedeutet.

Wird die Länge l unendlich gross, so existiert immer ein limes superior und ebenso ein limes inferior. Diese nenne ich die obere und die untere Dichte. Fallen sie zusammen, nenne ich sie einfach die durchschnittliche Dichte.

Definition 2: Unter einer asymptotischen Umgebung der Kurve $y = f(x)$ verstehe ich den durch die Beziehungen

$$y = f(x) + \vartheta\varphi(x),\ 0 \leqq \vartheta \leqq 1,\ \lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$$

dargestellten Bereich. Natürlich kann ϑ auch in anderer Art eingeschränkt sein, z. B. $-1 \leqq \vartheta \leqq 1$ und ähnliches.

Satz 1. *Besitzt die n^{te} Differenzfunktion $f_n(x)$ einer Funktion $f(x)$ einen irrationalen Grenzwert C für $x \to \infty$, so hat die Menge der Gitterpunktabszissen jeder asymptotischen Umgebung der Kurve $y = f(x)$ die Dichte Null.*

Beweis: Es seien m ganz und $\geqq n$ und die ganzen Zahlen $r_0, r_1, \ldots, r_n$ derart, dass

$$0 \leqq r_0 < r_1 < \ldots < r_n \leqq m.$$

Weiter seien $\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ Zahlen aus dem Intervall $0 \leqq \vartheta \leqq 1$.

Aus den Gleichungen

$$f(\vartheta_i, x + r_i) = f(x) + f_1(x)\binom{r_i}{1} + \ldots + f_n(x)\binom{r_i}{n} + g_{r_i}(x) + \vartheta_i\varphi(x + r_i),$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n)$$

wo

$$g_r(x) = f_{n+1}(x)\binom{r}{n+1} + f_{n+2}(x)\binom{r}{n+2} + \ldots + f_r(x),$$

bekommt man durch Multiplikation mit den Unterdeterminanten A_i, welche zu den Gliedern der letzten Spalte der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \binom{r_0}{1} & \ldots & \binom{r_0}{n} \\ 1 & \binom{r_1}{1} & \ldots & \binom{r_1}{n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \binom{r_n}{1} & \ldots & \binom{r_n}{n} \end{vmatrix}$$

gehören und nachherige Addition aller Gleichungen

Digitized by Google

$$\sum_{i=0}^{n} A_i f(\vartheta_i, x + r_i) = Df_n(x) + \sum_{i=0}^{n} A_i g_{r_i}(x) + \sum_{i=0}^{n} \vartheta_i A_i \varphi(x + r_i).$$

Wenn m festgehalten wird, gibt es nur endlich viele mögliche Wahlen der Zahlen r. Sowohl D wie die Zahlen A_i können also nur endlich viele Werte annehmen, und ausserdem ist immer $D \neq 0$, da alle r verschieden sind. Da $\lim_{x \to \infty} Df_n(x) = DC$ also für jede Wahl der r irrational ist, gibt es eine so grosse positive Zahl G_1, dass der Unterschied zwischen $Df_n(x)$ und der nächsten ganzen Zahl $> d$ ist für alle Wahlen der r. Weiter sei A das Maximum der Zahlen $|A_i|$ für die verschiedenen Wahlen der r.

Setzt man

$$\varepsilon = \frac{d.2^{n-1}}{(n+1)A.3^m},$$

so gibt es eine so grosse positive Zahl G_2, dass

$$|f_n(x) - C| < \varepsilon$$

für alle $x > G_2$. Aus der Beziehung

$$f_{n+\nu}(x) = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r \binom{\nu}{r} f_n(x + \nu - r) = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r \binom{\nu}{r} (f_n(x + \nu - r) - C)$$

folgt für alle $x > G_2$ und alle ganzen positiven ν

$$|f_{n+\nu}(x)| < 2^\nu \varepsilon$$

und also auch

$$|g_r(x)| < \left(2\binom{r}{n+1} + 2^2\binom{r}{n+2} + \ldots + 2^{r-n}\right)\varepsilon < \frac{3^r}{2^n}\varepsilon.$$

Wenn $x > G_2$, gilt also die Beziehung

$$|g_r(x)| < \frac{d}{2(n+1)A}.$$

Weiter gibt es eine so grosse positive Zahl G_3, dass

$$|\varphi(x)| < \frac{d}{2(n+1)A}$$

ist für alle $x > G_3$. Für alle $x > \max(G_2, G_3)$ ist deshalb

$$\left|\sum_{i=0}^{n} A_i g_{r_i}(x)\right| < \frac{d}{2}, \quad \left|\sum_{i=0}^{n} \vartheta_i A_i \varphi(x + r_i)\right| < \frac{d}{2}.$$

Für alle $x > \max(G_1, G_2, G_3)$ kann dann die Summe

Digitized by Google

$$\sum_{i=0}^{n} A_i f(\vartheta_i, x + r_i)$$

nie ganz sein. Da die Zahlen A_i alle ganz sind, muss mindestens eine der Zahlen $f(\vartheta_i, x + r_i)$ nicht ganz sein, und da dies für alle Wahlen der r gilt, kann die Dichte der Gitterpunktabszissen in jedem Intervalle x bis $x + m$ höchstens gleich $\frac{n}{m}$ sein, wenn $x > \max(G_1, G_2, G_3)$ ist. Im Intervalle x bis $x + l$, $mh \leqq l < m(h+1)$, muss die Dichte $\leqq \frac{n(h+1)}{mh}$ sein. Die obere Dichte im asymptotischen Streifen ist deshalb $\leqq \frac{n}{m}$. Da aber m beliebig gross ist, hat die Menge der Gitterpunktabszissen die durchschnittliche Dichte Null.

Anmerkung: Falls $f(x)$ komplexe Werte annehmen kann für reelle Werte von x, kann man einen ähnlichen Satz aufstellen, worin man diejenigen ganzen rationalen Zahlen x betrachtet, für welche y eine ganze Zahl eines quadratisch imaginären Zahlkörpers wird. Unter einer asymptotischen Umgebung der Kurve $y = f(x)$ hat man dann den Bereich

$$y = f(x) + \vartheta\varphi(x),\ |\vartheta| \leqq 1,\ \lim_{x=\infty} \varphi(x) = 0$$

zu verstehen.

Korollar: Die Verteilungsdichte der ganzen Zahlen x, für welche die Beziehung

$$0 \leqq y - \sum_{r=0}^{n} a_r x^{n-r} \leqq \varphi(x),\ \lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$$

stattfindet, ist Null, wenn nicht alle Koeffizienten a rational sind.

Hieraus folgt wieder: Ist

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{n-r},$$

und haben die ganzen Zahlen x, für welche $f(x)$ ganz ist, eine Dichte > 0, so muss $f(x)$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten sein.

Ein weiteres Beispiel ist: Im Streifen

$$y = ax + f(x) + \vartheta\varphi(x),\ 0 \leqq \vartheta \leqq 1,\ \lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0,$$
$$a \text{ irrational},\ \lim_{x\to\infty} f_1(x) = 0,$$

Digitized by Google

wobei $f_1(x)$ die erste Differenzfunktion von $f(x)$ bedeuten soll, sind die Gitterpunkte so verteilt, dass ihre Abszissen die durchschnittliche Dichte Null haben.

Satz 2. *Ist die erste derivierte $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ immer positiv für positives x und monoton abnehmend für $x \to \infty$, während $f(x)$ ins Unendliche wächst für $x \to \infty$, so ist die untere Dichte der Gitterpunktabszissen des Streifens*

$$y = f(x) + \vartheta\varphi(x),\ 0 \leqq \vartheta \leqq 1,\ \varphi(x) > 0,\ \lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$$

$= 0$. *Bleibt $xf'(x) > C > 0$, so ist auch die obere Dichte Null.*

Beweis: Es sei $g(y)$ die kleinste und $G(y)$ die grösste Abszisse, welche für die ganze Ordinate y im Streifen vorkommt. Dann ist

$$f(G(y)) = y,\quad f(g(y)) + \varphi(g(y)) = y.$$

Ich beschränke mich auf so grosse x, dass $\varphi(x)$ immer < 1 bleibt. Aus den Gleichungen

$$f(G(y)) + 1 = y + 1,\quad f(g(y+1)) + \varphi(g(y+1)) = y + 1$$

folgt dann, wegen $\varphi(g(y+1)) < 1$,

$$f(G(y)) < f(g(y+1)),$$

woraus, da f monoton wachsend ist,

$$G(y) < g(y+1).$$

Weiter hat man

$$f(G(y)) - f(g(y)) = \varphi(g(y))$$
$$f(g(y+1)) - f(G(y)) = 1 - \varphi(g(y+1)),$$

und weil $f'(x)$ monoton abnehmend sein soll,

$$\frac{f(G(y)) - f(g(y))}{G(y) - g(y)} > f'(G(y)),\quad \frac{f(g(y+1)) - f(G(y))}{g(y+1) - G(y)} < f'(G(y)).$$

Hieraus

$$G(y) - g(y) < \frac{\varphi(g(y))}{f'(G(y))},\quad g(y+1) - G(y) > \frac{1 - \varphi(g(y+1))}{f'(G(y))},$$

und folglich

$$\frac{G(y) - g(y)}{g(y+1) - g(y)} < \frac{G(y) - g(y)}{g(y+1) - G(y)} < \frac{\varphi(g(y))}{1 - \varphi(g(y+1))}.$$

Bedeutet σ_y die Dichte der ganzen Abszissen im Streifen zwischen $g(y)$ und $g(y+1)$, so sieht man leicht ein, dass

Digitized by Google

$$\sigma_y \leqq \frac{G(y) - g(y)}{g(y+1) - g(y)}$$

sein muss. Es ist also $\lim_{y \to \infty} \sigma_y = 0$, woraus folgt, dass die Gitterpunktabszissen des Streifens die untere Dichte Null haben. Es wird ja $\lim_{y \to \infty} s_y' = 0$, wenn s_y' die Dichte im Streifen zwischen $x = 0$ und $x = g(y)$ bedeutet.

Um zu zeigen, dass die obere Dichte $= 0$ ist, wenn $xf'(x) > C$ bleibt, braucht man nur nachzuweisen, dass

$$\lim_{y \to \infty} s_y = 0$$

ist, wobei s_y die Dichte im Streifen zwischen $x = 0$ und $x = G(y)$ bedeutet. Lässt man nämlich die Länge des Intervalles der Abszissen wachsen, so sind diese Zahlen s_y die grössten auftretenden Dichten. Nun ist

$$s_y \leqq \frac{N(y-1) + G(y) - g(y) + 1}{G(y)},$$

wobei $N(y-1)$ die Zahl der Elemente aus $M \leqq G(y-1)$ bedeutet. Hieraus

$$s_y < \frac{N(y-1)}{g(y)} + \frac{G(y) - g(y) + 1}{G(y)} = s'(y) + \frac{G(y) - g(y) + 1}{G(y)}.$$

Weiter hat man

$$\frac{G(y) - g(y) + 1}{G(y)} < \frac{\varphi(g(y)) + f'(G(y))}{G(y) f'(G(y))} < \frac{\varphi(g(y)) + f'(G(y))}{C},$$

woraus sofort ersichtlich ist, dass $\lim_{y \to \infty} s_y = 0$ sein muss, d. h. die obere Dichte von M ist auch Null.

Hierdurch ist Satz 2 bewiesen; ich möchte aber noch einige Bemerkungen hinzufügen:

1) Ist $\lim_{x \to \infty} xf'(x) = 0$, so wird die obere Dichte > 0 in asymptotischen Umgebungen, deren Höhe hinreichend langsam abnimmt, wenn x ins Unendliche wächst. Man kann nämlich dann voraussetzen, dass jede ganze Zahl $\geqq g(y)$ und $\leqq G(y)$ zu M gehört; sollte nämlich das nicht der Fall sein, braucht man nur $\varphi(x)$ im betreffenden Intervalle zu vergrössern unter Beibehalt der Werte in den Endpunkten und derart, dass der Maximumswert von $\varphi(x)$ im Intervalle nicht vergrössert wird. Ist ausserdem überall im Intervall

Digitized by Google

$$xf'(x) < \varepsilon(g(y)),$$

bekommt man

$$\varphi(g(y)) = f(G(y)) - f(g(y)) < \varepsilon \int_{g(y)}^{G(y)} \frac{dx}{x} = \varepsilon \log \frac{G(y)}{g(y)},$$

d. h.

$$\frac{G(y)}{g(y)} > e^{\frac{\varphi(g(y))}{\varepsilon(g(y))}}.$$

Weiter wird, wenn $N(y-1) \geqq 1$ ist,

$$s_y \geqq \frac{G(y) - g(y)}{G(y)} = 1 - \frac{g(y)}{G(y)}$$

und folglich

$$s_y > 1 - e^{-\frac{\varphi(g(y))}{\varepsilon(g(y))}}.$$

Es ist klar, dass φ so gewählt sein kann, dass $\frac{\varphi(g(y))}{\varepsilon(g(y))}$ für $y \to \infty$ ins Unendliche wächst. Dann wird $\lim_{y \to \infty} s_y = 1$.

Andererseits muss auch die obere Dichte $= 0$ sein, wenn φ hinreichend schnell abnimmt, selbst wenn $\lim_{x \to \infty} xf'(x) = 0$ ist. Dies wird z. B. augenscheinlich der Fall sein, wenn φ monoton abnimmt und

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(g(y))}{G(y) f' G(y)} = 0.$$

Hierzu genügt es à fortiori, dass

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(G(y-1))}{G(y) f'(G(y))} = 0$$

ist.

2) Die Voraussetzung im Satze 2, dass $f'(x)$ monoton abnimmt, ist wesentlich; das sieht man aus folgendem Beispiel:

Ich setze

$y = f(x) + \vartheta\varphi(x)$, $0 \leqq \vartheta \leqq 1$, $0 < \varphi(x) < 1$ für alle positiven x, und bestimme die Funktion f in folgender Weise:

$f(1) = 1$. Ist $f(x_{2n})$ ganz für ganzes x_{2n}, setze ich für alle $x \geqq x_{2n}$ und $\leqq x_{2n} + \psi(x_{2n}) = x_{2n+1}$

$$f(x) = f(x_{2n}) + \frac{1 - \varphi(x_{2n+1})}{\psi(x_{2n})}(x - x_{2n}).$$

Digitized by Google

Ist dagegen $f(x_{2n+1}) + \varphi(x_{2n+1})$ ganz für ganzes x_{2n+1}, setze ich für alle $x \geqq x_{2n+1}$ und $\leqq x_{2n+1} + x_{2n+1}\varphi(x_{2n+1}) = x_{2n+2}$

$$f(x) = f(x_{2n+1}) + \frac{x - x_{2n+1}}{x_{2n+1}}.$$

Weiter wähle ich φ und ψ so, dass $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x\varphi(x)} = 0$, während $\psi(x)$ mit x ins Unendliche wächst, was offenbar alles möglich ist. Wählt man $\varphi(x)$ in passender Art monoton abnehmend, wird jeder ganze Wert von x zwischen x_{2n-1} und x_{2n} zu M gehören. Folglich wird die Dichte von M im Intervalle x_{2n-2} bis x_{2n} gleich

$$\sigma_n' = \frac{x_{2n-1}\varphi(x_{2n-1}) + 1}{x_{2n-1}\varphi(x_{2n-1}) + \psi(x_{2n-2})}.$$

Folglich ist $\lim_{n\to\infty} \sigma_n' = 1$ und also auch $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$. Weiter ist

$$s_n' = \frac{N_{n-1}}{x_{n-1}},$$

wenn N_{n-1} die Zahl der Elemente aus M zwischen 0 und x_{2n-2} bedeutet, woraus

$$s_n' = s_{n-1} \cdot \frac{x_{2n-2}}{x_{2n-1}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{x_{2n-1}}{x_{2n-2}} = 1 + \frac{\psi(x_{2n-2})}{x_{2n-2}},$$

und da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 0,$$

bekommt man

$$\lim_{n\to\infty} s_n' = \lim_{n\to\infty} s_n = 1.$$

Die untere Dichte ist also auch $= 1$; die Menge M hat also in diesem Falle die durchschnittliche Dichte 1.

3) Anderseits kann aber in gewissen Fällen die Verteilungsdichte der Gitterpunktabszissen $= 0$ sein, selbst wenn $f'(x)$ nicht monoton abnimmt. Dies gilt z. B., wenn für alle positiven x

$$C_1 > xf'(x) > C_2 > 0.$$

Aus den Gleichungen

Digitized by Google

$$\int_{G(y)}^{G(y+1)} f'(x)\,dx = 1 < C_1 \int_{G(y)}^{G(y+1)} \frac{dx}{x} = C_1 \log \frac{G(y+1)}{G(y)},$$

$$\int_{g(y+1)}^{G(y+1)} f'(x)\,dx = \varphi(g(y+1)) > C_2 \log \frac{G(y+1)}{g(y+1)}$$

folgt

$$\sigma_y' = \frac{G(y+1) - g(y+1)}{G(y+1) - G(y)} < \frac{1 - e^{-\frac{\varphi(g(y+1))}{C_2}}}{1 - e^{-\frac{1}{C_1}}}.$$

Da $\lim_{y \to \infty} \varphi(g(y+1)) = 0$ folgt, dass $\lim_{y \to \infty} \sigma_y' = 0$ ist. Die obere Dichte ist also Null.

4) Die obere Dichte ist auch Null in folgendem Falle:

Für $x \to \infty$ wird $xf'(x)$ unendlich gross, während immer

$$C_1 > \frac{x_2 f'(x_2)}{x_1 f'(x_1)} > C_2,$$

wenn

$$x_1 \leqq x_2 < dx_1.$$

Betrachtet man nämlich nur so grosse Werte von x, dass immer

$$xf'(x) > \frac{1}{\log d}$$

bleibt, so bekommt man

$$\int_{G(y)}^{G(y+1)} f'(x)dx = 1 > \frac{1}{\log d} \log \frac{G(y+1)}{G(y)}, \text{ d. h. } \frac{G(y+1)}{G(y)} < d.$$

Dann wird also überall im Intervalle $x = G(y)$ bis $x = G(y+1$

$$C_1 G(y) f'(G(y)) > xf'(x > C_2 G(y) f'(G(y)).$$

Durch ähnliche Betrachtungen wie oben unter 3) bekommt man hieraus

$$\frac{G(y+1)}{g(y+1)} < e^{\frac{\varphi(g(y+1))}{C_2 G(y) f'(G(y))}}, \quad \frac{G(y+1)}{G(y)} > e^{\frac{1}{C_1 G(y) f'(G(y))}},$$

woraus wieder

$$\sigma_y' < \frac{1 - e^{-\frac{\varphi(g(y+1))}{C_2 G(y) f'(G(y))}}}{1 - e^{-\frac{1}{C_1 G(y) f'(G(y))}}}.$$

Digitized by Google

Da $\lim_{z\to 0}\frac{1-e^{-z}}{z}=1$, so sieht man, dass die obere Schranke für σ_y' für $y\to\infty$ gegen

$$\lim_{y\to\infty}\frac{\varphi(g(y+1))}{C_2}\cdot C_1=0$$

konvergieren muss. Also auch $\lim_{y\to\infty}\sigma_y'=0$.

Beispiel 1. Setzt man

$$y=ax+f(x)+\vartheta\varphi(x),\ 0\leqq\vartheta\leqq 1,\ \lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0,$$

wobei hier $a=\frac{b}{c}$ rational sein soll und $f_1(x)$ monoton gegen Null abnehmend derart, dass

$$xf_1(x)>C>0$$

bleibt, so ist die Dichte der Gitterpunktabszissen $=0$. Denn y kann nicht ganz sein, ohne dass auch

$$cy=bx+cf(x)+\vartheta c\varphi(x)$$

ganz wird, und dann wird auch

$$z=cy-bx=cf(x)+\vartheta c\varphi(x)$$

ganz, wodurch die Richtigkeit der Behauptung kraft Satz 2 ersichtlich wird.

Beispiel 2. Es sei

$$y=a\log x+b\int_0^x\frac{\sin cx}{x}\,dx+\vartheta\varphi(x),$$

a, b und c reelle Konstanten, $|a|>|b|$. Die Dichte der Gitterpunktsabszissen ist Null.

Sind die Kurven

$y=h_rf(x)$, $(r=1,2,\ldots,\mu)$, die Zahlen h_r ganz rational und $\neq 0$, mit zugehörigen asymptotischen Umgebungen U_r gegeben:

$$y=f_r(\vartheta,x)=h_rf(x)+\vartheta\varphi_r(x),$$

so ist die Menge der Abszissen der in $U_1,\ldots U_\mu$ vorkommenden Gitterpunkte in der Menge der Abszissen der Gitterpunkte der Umgebung U der Kurve $y=Hf(x)$ enthalten:

$$y=Hf(x)+\theta\Phi(x),\ -1\leqq\theta\leqq 1,$$
$$\Phi(x)=\max(|H_1\varphi_1(x)|,\ldots,|H_\mu\varphi_\mu(x)|),$$

Digitized by Google

wobei $H = H_1 h_1 = \ldots = H_\mu h_\mu$ und alle H_r ganze Zahlen sind. Ist nämlich (x, y) ein in U_r vorkommender Gitterpunkt, so sieht man sofort, dass $(x, H_r y)$ ein in U vorkommender Gitterpunkt ist.

Ist die Funktion $f(x)$ von der im Satze 2 erwähnten Art, so wird deshalb die untere Dichte der Abszissen der Gitterpunkte, welche überhaupt in den μ Streifen vorkommen, $= 0$.

Ist die obere Dichte der Gitterpunktabszissen $= 0$ in jedem von endlich vielen Streifen $U_1 \ldots U_\mu$, so ist sie selbstverständlich auch $= 0$ in allen zusammengenommen.

Satz 3. *Nimmt die $(n+1)^{te}$ Differenzfunktion $f_{n+1}(x)$ von $f(x)$ bei unendlich wachsendem x monoton gegen Null ab, aber derart, dass*

$$x f_{n+1}(x) > C > 0$$

bleibt, so hat die Menge M der Gitterpunktabszissen jeder asymptotischen Umgebung der Kurve $y = f(x)$ die Dichte Null.

Bleibt $x f_{n+1}(x)$ nicht grösser als eine positive Grösse, so hat M noch die untere Dichte Null, wenn $f_{n+1}(x) > 0$ bleibt, und $f_n(x)$ ins Unendliche wächst für $x \to \infty$.

Beweis: Ich betrachte zuerst den Fall $x f_{n+1}(x) > C$. Die ganze Zahl m sei $\geqq n$ und sonst beliebig; weiter seien $r_0, r_1, \ldots, r_n$ solche Zahlen, dass

$$0 \leqq r_0 < r_1 \ldots < r_n \leqq m.$$

In ähnlicher Weise wie im Beweise des Satzes 1 bekommt man eine Gleichung der Form:

$$\sum_{i=0}^{n} A_i f(\vartheta_i, x + r_i) = D f_n(x) + \sum_{i=0}^{n} A_i g_{ri}(x) + \sum_{i=0}^{n} A_i \vartheta_i \varphi(x + r_i).$$

Hier ist

$$|g_r(x)| < \frac{3^r}{2^{n+1}} \varepsilon,$$

wenn x so gross ist, etwa $x > G_1$, dass

$$|f_{n+1}(x)| < \varepsilon.$$

Offenbar kann man

$$\Sigma A_i g_{ri}(x) + \Sigma A_i \vartheta_i \varphi(x + r_i) = \theta . \psi(x), \quad 0 \leqq \theta \leqq 1,$$

schreiben, wobei $\lim_{x \to \infty} \psi(x) = 0$ ist. Nach der oben gemachten Bemerkung hat dann die Menge M' der ganzen Zahlen x, für welche

Digitized by Google

$$\Sigma A_i f(\vartheta_i, x + r_i) = D f_n(x) + \theta \psi(x)$$

eine ganze Zahl wird für irgendeine Wahl der r und der ϑ, die Dichte Null; denn es gibt nur endlich viele Wahlen der r, und bei diesen nimmt D nur ganze Werte $\neq 0$ an.

Die Zahlen aus M', welche in der Reihe

$$0, m, 2m, \ldots$$

auftreten, haben à fortiori verschwindende Dichte. So oft x nicht zu M' gehört, können im Intervalle x bis $x + m$ höchstens n Zahlen aus M auftreten.

Es sei δ eine beliebig kleine positive Grösse. Ist L hinreichend gross, wird für alle $l > L$ die Dichte von M' im Intervalle 0 bis lm immer $< \frac{\delta}{m}$ sein. Unter den Zahlen $0, m, \ldots, lm$ können also höchstens

$$\frac{\delta}{m} lm = \delta l$$

zu M' gehören, während wenigstens

$$(1-\delta) l + 1$$

nicht zu M' gehören. Ist

$$lm \leqq x < (l+1)m,$$

wird deshalb, wenn N die Zahl der Elemente aus M im Intervalle 0 bis x bedeutet,

$$N \leqq m.\delta l + n(1-\delta)l + n$$

und

$$\sigma \leqq \delta + \frac{n}{m}(1-\delta) + \frac{n}{ml},$$

wenn σ die Dichte von M in demselben Intervall bedeutet.

Wählt man bei beliebig gegebenem ε

$$m > \frac{3n}{\varepsilon}, \quad \delta < \frac{\varepsilon}{3},$$

so wird

$$\sigma < \varepsilon.$$

Hat man nur $f_{n+1}(x) > 0$, $f_n(x) \to \infty$ für $x \to \infty$, so hat M' noch die untere Dichte 0. Für unendlich viele Werte von l ist dann die Dichte von M' im Intervalle 0 bis $lm < \frac{\delta}{m}$. Werden

Digitized by Google

m und δ wie oben angegeben gewählt, wird $\sigma < \varepsilon$, wenn σ die Dichte von M im Intervalle 0 bis x, $lm \leqq x < (l+1)m$, bedeutet. Da dies für unendlich viele l gilt, ist die untere Dichte von $M \leqq \varepsilon$, und ε ist beliebig klein.

Korollar 1. Die Verteilungsdichte der ganzen Zahlen x, für welche

$$0 \leqq y - \sum_{r=0}^{n} a_r x^{\frac{n-r}{m}} \leqq \varphi(x), \quad \lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$$

für ganzes y stattfindet, ist 0, wenn die Summe nicht ein Polynom mit rationalen Koeffizienten ist.

Speziell bekommt man: Ist

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{\frac{n-r}{m}},$$

so kann $f(x)$ nicht ganz sein für eine Menge ganzer Zahlen x mit Dichte > 0, ohne dass $f(x)$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten ist.

Korollar 2. Es sei $F(x, y)$ ein Polynom derart, dass kein Polynom von x allein, statt y eingesetzt, die Gleichung $F(x, y) = 0$ identisch in x befriedigt. Dann haben die Abszissen der Gitterpunkte auf der Kurve $F(x, y) = 0$ die durchschnittliche Dichte Null.

Definition 3. Ich nenne ein Polynom

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i}$$

ein q-Polynom, wenn es von folgender Beschaffenheit ist:

Ist $Q(t)$ ein solches Polynom, dass

$$P(t)\,Q(t) = \Sigma B_k t^{r_k}, \quad 0 \leqq r_0 < r_1 < \ldots < r_n, \quad \text{alle } r_{i+1} - r_i \geqq a,$$

so ist immer

$$Q(1) \neq 0.$$

Falls bei gegebenen Zahlen r mehrere solche $Q(t)$ vorhanden sind, die sich nicht nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden, wird nur verlangt, dass für mindestens ein Q der Wert $Q(1) \neq 0$ ist.

Die Koeffizienten der Polynome werden im folgenden entweder als ganze rationale Zahlen oder ganze Zahlen eines quadratisch imaginären Zahlkörpers vorausgesetzt.

Digitized by Google

Definition 4. Ich sage, dass $\psi(x)$ eine v-Funktion ist, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

Sind $A_1 \ldots A_N$ solche Zahlen, dass

$$\sum_{l=1}^{N} A_l \neq 0$$

ist, so ist die Dichte der Gitterpunktabszissen jeder asymptotischen Umgebung der Kurve

$$y = \sum_{l=1}^{N} A_l \psi(x+l).$$

$= 0$.

Kraft der Sätze 1, 2 und 3 beweist man leicht, dass $\psi(x)$ immer eine v-Funktion ist in folgenden beiden Fällen:

1) Eine Differenzfunktion $\psi_n(x)$ von $\psi(x)$ konvergiert gegen einen irrationalen Grenzwert für $x \to \infty$.

2) $x\psi_n(x)$ ist immer $> C > 0$ für positive x, und $\psi_n(x)$ nimmt monoton gegen 0 ab für $x \to \infty$.

Satz 4a. *Ist*

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i}$$

ein q-Polynom, und ist

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f(x+n-i) = \psi(x)$$

eine v-Funktion, so ist auch f(x) eine v-Funktion.

Beweis: Ich betrachte eine asymptotische Umgebung der Kurve $y = f(x)$:

$$y = f(\vartheta, x) = f(x) + \vartheta\varphi(x).$$

M sei die Menge der Abszissen der darin vorkommenden Gitterpunkte. Man bekommt

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f(\vartheta_{n-i}, x+n-i) = \psi(x) + \sum_{i=0}^{n} \vartheta_{n-i} a_i \varphi(x+n-i).$$

Sind die ganzen Zahlen $r_0, \ldots, r_n$ so gewählt, dass alle Differenzen $r_{i+1} - r_i \geqq a$ sind, und setzt man, indem $Q(t)P(t) = \sum_{k}^{n} B_k t^{r_k}$ ist,

$$Q(t) = \Sigma b_j t^j,$$

so wird, weil $P(t)$ ein q-Polynom ist,

$$\Sigma b_j \neq 0,$$

und weiter bekommt man

Digitized by Google

$$\Sigma b_j \Sigma a_i f(\vartheta_{n-i+j}, x+n-i+j)$$
$$= \Sigma b_j \psi(x+j) + \Sigma b_j \Sigma \vartheta_{n-i+j} a_i \varphi(x+n-i+j)$$

oder nach der Bedeutung von $Q(t)$:

$$\Sigma B_k f(\vartheta_{r_k}, x+r_k)$$
$$= \Sigma b_j \psi(x+j) + \theta \Phi(x),\ 0 \leqq \theta \leqq 1,\ \lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 0.$$

Da ψ eine v-Funktion sein soll, wird die Dichte der Menge M' der ganzen Zahlen x, für welche

$$\Sigma B_k f(\vartheta_{r_k}, x+r_k)$$

ganz wird für irgendeine Wahl der ϑ zwischen 0 und 1, $= 0$, wenn alle Differenzen $r_{i+1} - r_i \geqq a$ und die r sonst irgendwie zwischen 0 und einer festen Zahl m gewählt werden.

Nun sei $m > an$, und ich betrachte die Reihe $0, m, 2m, \ldots$. Ist δ eine beliebige positive Grösse, gibt es eine so grosse positive Zahl L, dass die Dichte von M'

$$\leqq \frac{\delta}{m}$$

ist in jedem Intervalle 0 bis lm, wenn $l > L$ ist. Folglich gehören unter den Zahlen

$$0, m, 2m, \ldots, lm$$

höchstens

$$\delta l$$

zu M', während wenigstens

$$(1-\delta)l + 1$$

nicht zu M' gehören. So oft aber x nicht zu M' gehört, können im Intervalle x bis $x+m$ höchstens an Zahlen aus M vorkommen. Sind nämlich

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{na}$$

$na+1$ verschiedene ganze Werte von x, so sind die Differenzen

$$x_a - x_0,\ x_{2a} - x_a, \ldots,\ x_{na} - x_{(n-1a)}$$

alle $\geqq a$.

Die Zahl der Elemente aus M im Intervalle 0 bis x, wenn

$$lm \leqq x < (l+1)m$$

ist, kann deshalb höchstens gleich

$$\delta lm + (1-\delta) lan + an$$

Digitized by Google

sein, und die Dichte von M in diesem Intervall

$$\sigma \leqq \delta + (1-\delta)\frac{an}{m} + \frac{an}{lm}.$$

Ist eine positive Grösse ε beliebig gegeben, so hat man nur

$$m > \frac{3an}{\varepsilon}, \quad \delta < \frac{\varepsilon}{3}$$

zu wählen, um in jedem hinreichend langen Intervalle

$$\sigma < \varepsilon$$

zu erhalten. Die Dichte der Gitterpunktabszissen ist also Null in jeder asymptotischen Umgebung von $y = f(x)$.

Sind $A_0' \ldots A'_{N'}$ solche ganze Zahlen, dass

$$\sum_{k=0}^{N'} A'_k \neq 0,$$

und setzt man

$$F(x) = \sum_{k=0}^{N'} A'_k f(x+k), \quad \Psi(x) = \Sigma A'_k \psi(x+k),$$

so wird

$$\Sigma a_i F(x+n-i) = \Psi(x)$$

und ausserdem

$$\Sigma A_l \Psi(x+l) = \Sigma A_l \Sigma A'_k \psi(x+k+l) = \sum_{\lambda=0}^{N+N'} C_\lambda \psi(x+\lambda),$$

wobei

$$C_\lambda = \sum_{l=0}^{\lambda} A_l A'_{\lambda-l}.$$

Zugleich wird

$$\Sigma C_\lambda = \Sigma A_l \Sigma A'_k \neq 0,$$

wenn $\Sigma A_l \neq 0$ ist. Nach dem oben bewiesenen haben dann die Gitterpunktabszissen jeder asymptotischen Umgebung der Kurve $y = F(x)$ die Dichte Null. Hierdurch ist bewiesen, dass $f(x)$ eine v-Funktion ist.

Satz 4b. *Ist*

$$P(t) = P_1(t) \ldots P_\mu(t)$$

und

$$P(t) = \Sigma a_i t^{n-i}, \; P_1(t) = \Sigma a_i^{(1)} t^{n_1-i}, \ldots, P_\mu(t) = \Sigma a_i^{(\mu)} t^{n_\mu - i},$$

und ist $f(x)$ eine v-Funktion, so oft $\Sigma a_i^{(r)} f(x+n_r-i)$ eine solche ist ($r = 1, 2, \ldots \mu$), so ist auch $f(x)$ eine v-Funktion, so oft $\Sigma a_i f(x+n-i)$ eine solche ist.

Beweis: Schreibt man

Digitized by Google

$$\Sigma a_i^{(1)} f(x+n_1-i) = f_1(x),\ \Sigma a_i^{(2)} f_1(x+n_2-i)$$
$$= f_2(x), \ldots, \Sigma a_i^{(\mu)} f_{\mu-1}(x+n_\mu-i) = f_\mu(x),$$

so ist

$$\Sigma a_i f(x+n-i) = f_\mu(x).$$

Falls $f_\mu(x)$ eine v-Funktion ist, bekommt man zuerst, dass $f_{\mu-1}(x)$ auch ein solche ist; daraus folgt wieder, dass $f_{\mu-2}(x)$ eine v-Funktion ist usw. Also muss $f(x)$ eine v-Funktion sein, so oft $\Sigma a_i f(x+n-i)$ eine solche ist, w. z bw. w.

Satz 4c. *Ist $f(x)$ eine v-Funktion, so oft $\Sigma a_i f(x+n-i)$ eine solche ist, so ist auch $f(x)$ immer eine v-Funktion, wenn $\sum_{i=0}^{n} a_i f(x+\gamma n-\gamma i)$ eine solche ist.*

Beweis: Es sei

$$\Sigma a_i f(x+\gamma n-\gamma i) = \psi(x)$$

eine v-Funktion. Schreibt man

$$f(\gamma x+\mu) = f_\mu(x), \quad \psi(\gamma x+\mu) = \psi_\mu(x),$$

so wird

$$\Sigma a_l f_\mu(x+n-i) = \psi_\mu(x),$$

und $\psi_\mu(x)$ ist wieder eine v-Funktion. Es sei nämlich $\sum_{l=1}^{N} A_l \neq 0$, alle A ganz. Dann wird

$$\Sigma A_l \psi_\mu(x+l) = \Sigma A_l \psi(\gamma x+\mu+\gamma l).$$

Setzt man für $l = 1, 2, \ldots, N$ $B_{\gamma l} = A_l$, dagegen $B_\lambda = 0$, wenn $\lambda \not\equiv 0 \pmod{\gamma}$ ist, so ist $\sum_{\lambda=1}^{N} B_\lambda = \sum_{l=1}^{\gamma N} A_l \neq 0$, und also ist die Dichte der ganzen Abszissen $= 0$ in jeder asymptotischen Umgebung von $y = \Sigma A_l \psi(x+\gamma l)$ und also à fortiori in jeder Umgebung von $y = \Sigma A_l \psi(\gamma x+\mu+\gamma l)$.

Hieraus folgt, dass $f_\mu(x)$ eine v-Funktion ist, und folglich ist die Dichte der ganzen Abszissen $= 0$ in jeder asymptotischen Umgebung der Kurve

$$y = f(\gamma x+\mu).$$

Da dies für $\mu = 0, 1, \ldots, \gamma-1$ gilt, folgt dass die Dichte der Gitterpunktabszissen $= 0$ sein muss in jeder asymptotischen Umgebung von

$$y = f(x).$$

Um dann einzusehen, dass $f(x)$ eine v-Funktion ist, braucht man nur zu bemerken, dass, wenn man schreibt

Digitized by Google

$$\Sigma A'_k f(x+k) = F(x), \quad \Sigma A'_k \psi(x+k) = \Psi(x,$$

so wird

$$\Sigma a_i F(x+\gamma n-\gamma i) = \Psi(x),$$

und wenn

$$\Sigma A'_k \neq 0$$

ist, so wird $\Psi(x)$ wieder eine v-Funktion, wie aus dem letzten Teil des Beweises des Satzes 4a zu sehen ist.

Diese Betrachtungen führen zu folgendem Ergebnis: Um zu untersuchen, ob der Schluss, dass $f(x)$ eine v-Funktion ist, wenn $\Sigma a_i f(x+n-i)$ eine solche ist, gilt, kann man das Polynom $P(t) = \Sigma a_i t^{n-i}$ in irreduzible Faktoren spalten, und wenn einer dieser Faktoren nur γ^{te} Potenzen von t enthält, kann man t^γ durch t ersetzen. Wenn jedes der hierdurch erhaltenen Polynome $P(t)$ von einer der beiden Arten ist:

1) Die Wurzeln der Gleichung $P(t) = 0$ sind alle reell und $\neq -1$,

2) $P(t) = P_1(t)^2 + mP_2(t)^2$, m ganz positiv, die Wurzeln der Gleichung

$$P_1(t) + \sqrt{-m}\, P_2(t) = 0$$

alle ihrem absoluten Werte nach verschieden und verschieden von 1, so ist der erwähnte Schluss richtig.

Im Falle 1) ist es leicht zu zeigen, dass $P(t)$ ein q-Polynom sein muss. Ist $t = 1$ eine Wurzel, so muss $P(t) = t-1$ sein, da es ja irreduzibel sein soll. Aus der Gleichung

$$(t-1)(t^{n-1} + t^{n-2} + \ldots + t + 1) = t^n - 1$$

folgt sofort, dass $t-1$ ein q-Polynom ist. Es bleibt also nur der Fall zu behandeln, wo alle Wurzeln ihrem Zahlwerte nach von 1 verschieden sind. Ich nehme nun zuerst an, dass der Quotient zweier Wurzeln immer $\neq -1$ ist. Soll

$$P(t)\, Q(t) = \Sigma B_k t^k \text{ und zugleich } Q(1) = 0$$

sein, so muss

$$\sum_{k=0}^{n} B_k t^{rk} = 0$$

sein sowohl für die n Wurzeln von $P(t)$ wie für $t = 1$. Diese $n+1$ Werte von t lassen sich aber ihrem Zahlwerte nach in einer Reihe ordnen:

$$|t_1| > |t_2| \ldots > |t_{n+1}|.$$

Digitized by Google

Durch Elimination der Zahlen B_k erhält man

$$\begin{vmatrix} t_1^{r_n} & t_1^{r_{n-1}} \dots & t_1^{r_1} & t_1^{r_0} \\ t_2^{r_n} \dots & & & \\ & & & \\ t_{n+1}^{r_n} \dots & & & t_{n+1}^{r_0} \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist aber offenbar unmöglich, wenn alle Differenzen $r_{i+1} - r_i$ hinreichend gross sind, weil das Hauptdiagonalglied dann grösser als die Summe der absoluten Werte der übrigen Glieder wird.

Hätte man

$$t_1 + t_2 = 0,$$

wobei t_1 und t_2 zwei Wurzeln von $P(t) = 0$ sind, so bekäme man, falls der Grad von $P(t) > 2$ sei, weil die Gruppe dieser Gleichung transitiv sein muss,

$$t_3 + t_4 = 0,$$

wobei t_3 und t_4 zwei andere Wurzeln sind. Es kann ja nicht z. B. $t_1 + t_3 = 0$ sein; dann daraus würde $t_2 = t_3$ folgen, was wegen der Irreduzibilität von $P(t)$ nicht möglich ist. Der Grad von $P(t)$ müsste gerade sein, und die Wurzeln zerfielen in Paaren derart, dass die Summe zweier Wurzeln eines Paares $= 0$ wäre. Dann enthielte aber $P(t)$ offenbar nur gerade Potenzen von t und wäre noch nicht in dem oben angegebenen Sinne reduziert.

Im Falle 2) bekommt man durch Adjunktion von $\sqrt{-m}$ die weitere Zerlegung

$$P(t) = (P_1(t) + \sqrt{-m}\, P_2(t))\,(P_1(t) - \sqrt{-m}\, P_2(t)).$$

Da die ganzen Zahlen eines quadratisch imaginären Zahlkörpers einen diskontinuierlichen Integritätsbereich bilden, so sieht man leicht ein, dass die obigen für den absoluten Rationalitätsbereich durchgeführten Betrachtungen auch auf jenen übertragbar sind. Ausserdem beweist man durch Betrachtung einer Determinante wie oben, dass

$$P_1(t) + \sqrt{-m}\, P_2(t) \text{ und } P_1(t) - \sqrt{-m}\, P_2(t)$$

q-Polynome sind.

Beispiel 1.

$$f(x) = P_1(x)\,(1 + \sqrt{2})^x + P_2(x)\,(1 - \sqrt{2})^x + P_3(x),$$

Digitized by Google

P_1 und P_2 beliebige Polynome, P_3 ein Polynom mit einem irrationalen Koeffizienten.

Beispiel 2.

$$f(x) = P_1(x)(1+\sqrt{-2})^x + P_2(x)(1-\sqrt{-2})^x + P_3(x),$$

P_1 und P_2 Polynome mit paarweise konjugiert imaginären oder gleichen reellen Koeffizienten, P_3 ein Polynom mit reellen und mindestens einem irrationalen Koeffizienten.

In beliebigen asymptotischen Umgebungen von $y = f(x)$ ist in beiden diesen Fällen die Dichte der Gitterpunktabszissen $= 0$.

Beispiel 3. In jedem Streifen

$$y = \alpha g(x) + \beta(x - g(x)) + \vartheta\varphi(x),\ 0 \leqq \vartheta \leqq 1,\ \lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 0,$$

wobei α und β linear unabhängige irrationale Zahlen sind, $g(0) = 0$ und $g(x+1) - g(x)$ für jede ganze Zahl x entweder 0 oder 1, ist die durchsnittliche Gitterpunktdichte $= 0$.

Man hat nämlich für jede ganze Zahl x entweder $f_1(x) = \alpha$ oder $f_1(x) = \beta$, und es kann interessant sein zu bemerken, dass $\psi(x)$ eine v-Funktion ist, wenn sie für ganze x nur endlich viele irrationale und linear unabhängige Werte bekommt; denn dann nimmt eine Summe

$$\Sigma b_j \psi(x+j)$$

für ganze x nur endlich viele Werte an, die alle irrational sind.

Ein Beispiel der Nicht-gültigkeit des im Satze 4 erwähnten Schlusses ist folgendes: Ist

$$f(x+1) + f(x) = \alpha,\ \alpha \text{ irrational},$$

so ist wohl $\psi(x) = \alpha$ eine v-Funktion; aber f braucht eine solche nicht zu sein. Setzt man z. B. $f(0) = 0$, so wird $f(2x) = 0$, $f(2x+1) = \alpha$ für jedes ganze x und die Dichte der ganzen Abszissen in einer beliebigen asymptotischen Umgebung von $y = f(x)$ ist dann $= \frac{1}{2}$.

Ich habe auch untersucht, wie die Sachen stehen, wenn man die Koeffizienten a_i im Satze 4 durch ganzwertige Funktionen ersetzt. Ich will aber hier nicht darauf eingehen.

Der Zusammenhang zwischen diesen Untersuchungen und den Untersuchungen über die Verteilung von Zahlen mod. 1 ist folgender:

Satz 5. *Dass die durchschnittliche Dichte der Abszissen der Gitterpunkte jeder asymptotischen Umgebung der Kurve* . .

Digitized by Google

$$y = f(x)$$

$= 0$ ist, ist damit gleichbedeutend, dass die obere Dichte der ganzen Zahlen x, für welche

$$f(x) \equiv -\vartheta\lambda \pmod 1,\ 0 \leqq \vartheta \leqq 1,$$

$< \varepsilon$ ist, wenn λ hinreichend klein gewählt wird.

Beweis: Es seien $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots$, $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$. Kann man für jedes n ein λ_n finden derart, dass die obere Dichte im Streifen

$$y = f(x) + \vartheta\lambda_n$$

$< \varepsilon_n$ ist, so kann man offenbar $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ voraussetzen. Es sei $\varphi(x)$ monoton abnehmend und $\varphi(l_n) = \lambda_n$. Dann ist $l_1 < l_2 < \ldots$. Die obere Dichte im Streifen

$$y = f(x) + \vartheta\varphi(x),\ 0 \leqq \vartheta \leqq 1,$$

zwischen $x = l_n$ und $x \to \infty$ ist dann $< \varepsilon_n$. Hieraus folgt, dass die obere Dichte im letzteren Streifen zwischen $x = 0$ und $x \to \infty$ auch $< \varepsilon_n$ sein muss, und da dies für jedes n gilt, ist die obere Dichte $= 0$.

Es seien $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Ist die obere Dichte in jedem Parallelstreifen $> \sigma$, so kann man für jedes n auf unendlich viele Weisen ein l_n finden derart, dass die Dichte im Streifen mit der Höhe λ_n zwischen $x = 0$ und $x = l_n > \sigma$ ist. Deshalb kann man die Zahlen $l_1, l_2, \ldots$ monoton wachsend wählen. Wählt man $\varphi(x)$ monoton abnehmend derart, dass $\varphi(l_n) = \lambda_n$, so wird die Dichte im asymptotischen Streifen

$$y = f(x) + \vartheta\varphi(x)$$

zwischen $x = 0$ und $x = l_n$ notwendig $> \sigma$. Also haben die Gitterpunktabszissen des letzteren Streifens eine Dichte > 0.

Digitized by Google

Digitized by Google

EINIGE WORTE ÜBER AKTUELLE MATHEMATISCHE PRINZIPFRAGEN

VON

T. BRODÉN

Für die Mathematik ist ein »Ragnarök« vor der Tür, sagen einige. Und auch die hervorragendsten Mathematiker nehmen daran Teil, das drohende Ungewitter zu beschwören. Man lässt sich aber im allgemeinen nicht erschrecken, sondern arbeitet ruhig weiter. Wie steht es eigentlich hiermit?

Man hat gewisse Widersprüche angetroffen. Und solche darf die Mathematik nicht tolerieren. Um dieselben wenn möglich zum Verschwinden zu bringen, muss man die äussersten Prinzipien revidieren. Hiermit hat man sich bekanntlich auch vielfach beschäftigt. Von einigen Seiten wurde hierbei eine sehr gründliche Umgestaltung verlangt, indem man den ursprünglichen Cantorschen Mengenbegriff nicht länger beibehalten wollte, und damit auch nicht den Begriff eines »aktuel Unendlichen«. Dies konnte ja auch aus anderen Gründen gefordert werden. Das ist eine Frage für sich. Handelt es sich aber nur um die Bedeutung der bis jetzt dargestellten »mengentheoretischen Antinomieen«, so kann man fragen, ob das Auftreten derselben wirklich als hinreichender Grund für die Aufgebung des Cantorschen Mengenbegriffes betrachtet werden kann. Nach meiner Meinung ist es kaum so. Auch vom Horizonte der »alten Mengenlehre« aus erscheinen jene Antinomieen bei näherer Betrachtung als wenig gefährlich. Nur muss man diese Lehre in rationeller Weise begründen und ausgestalten. Im folgenden werde ich mir gestatten, diesen Gedanken etwas näher auszuführen und im Zusammenhange hiermit verschiedene mathematisch-prinzipielle Bemerkungen vorzubringen.

Ich für mein Teil habe mich schon vor dem Auftreten der Antinomieen mit mathematischen Prinzipfragen beschäftigt, aber dies in erster Hand mehr aus philosophischen als aus direkt

Digitized by Google

mathematischen Gründen. Hier soll es sich ja vor Allem um die mathematischen Seiten der Dinge, also die Grundlegung der Mathematik handeln.

Hegel hat bekanntlich seinem Vorgänger *Fichte* vorgeworfen, dass dieser in seinem Philosophieren nicht hinreichend systematisch zu Werke ginge, namentlich dass bei ihm »das Absolute« allzu unvermittelt, wie »aus einer Pistole geschossen«, hineinkomme. Statt dessen führte *Hegel* selbst einen geordneten und fortschreitenden Prozess ein. Freilich ist dieser Prozess aus mathematischem Gesichtspunkte sehr unsympatisch. Nichtsdestoweniger habe ich mir seit langer Zeit eine Grundlegung der Mathematik (und damit auch der Erkenntnistheorie überhaupt) gedacht, welche wenigstens in ihren abstraktesten Teilen eine entfernte Ähnlichkeit mit der Hegelschen Dialektik haben sollte, eine soweit als möglich notwendigkeitsgeprägte Entwicklung, welche alles auf seinen natürlichen Platz stellte. Den Ausgangspunkt sollten die nackten, schwebenden Begriffe Einheit und Vielheit bilden. Und ein Paar Hauptergebnisse bei der Entwicklung werde ich hier auch berühren[1]). Es zeigte sich, dass der Begriff *Menge* eine fundamentale Stellung einnehmen musste, obgleich er nicht sofort fix und fertig auftrat, sondern nur allmählich einen gebührend abgegrenzten Inhalt bekam. Ferner ergab sich eine Antwort auf die Frage nach der Einführung des *Unendlichkeitsbegriffes*. In der Tat führte die Entwicklung auf nichts anderes als die alte Dedekindsche Definition: eine Menge ist unendlich, wenn sie sich (1,1) - deutig auf eine Teilmenge ihrer selbst abbilden lässt. Man gelangt hierzu wirklich durch einen »geordneten und fortschreitenden Prozess«, nicht durch einen »Pistolenschuss«.

Dann aber kommen diese ärgerlichen »Antinomieen«. Über diese wage ich folgendes zu proklamieren. Man muss sich immer so einrichten, dass wenn möglich jeder Begriff, welcher zu Widersprüchen führt, ganz einfach abgesondert, refusiert wird. Der

---

[1]) Die Hauptzüge des Systems wurden in einer Abhandlung mit dem Titel »Eine realistische Grundlegung der Mathematik« (Lunds Univ. Årsskrift. N. F. Avd. 2. Bd. 20. Lund 1924) dargestellt. Doch ist nicht Alles hierin als ganz definitiv zu betrachten. Verbesserungen verschiedener, insbesondere formaler Art werden in einer künftigen (auch abgekürzten) Darstellung angebracht werden. — Im folgenden wird jene Abhandlung mit »Real. Gr.« bezeichnet.

Digitized by Google

Hauptfeind ist der Widerspruch. »Existenz« ist mit Widerspruchsfreiheit gleichbedeutend (beiläufig gesagt habe ich bei meiner Entwicklung die Widersprüche auf zwei Grundtypen zurückgeführt). Dies lautet ja sehr schön und einfach. Aber das Fatale könnte ja eintreffen, dass irgend ein Begriff, welcher als Quelle von Widersprüchen zu refusieren wäre, sich andererseits als unentbehrlich, unabweisbar zeigte. Liegen in der Tat solche Fälle vor? Ich wenigstens kenne keinen einzigen. Sobald ein Widerspruch nicht im Grunde nur scheinbar ist, kann man, so viel ich habe finden können, über denselben einfach dadurch hinwegkommen, dass man einen gewissen Begriff aus dem Gebiete des Denkens verweist, ohne dass dies in irgend einer Hinsicht zu bedauern wäre. Nicht unpassend könnte man Antinomieen, bei denen dies der Fall ist, als »eigentliche« Paradoxieen bebezeichnen; bei ihnen liegt ein wirklicher Widerspruch vor, bei anderen — »uneigentlichen« — nur ein scheinbarer. Eine ergiebige Widerspruchsquelle bildet der Begriff »Menge, welche sich selbst als Element enhält«. Sollen wir denselben also abweisen, indem wir als ein für legitime Mengen geltendes Postulat feststellen, dass keine Menge selbstenthaltend sein darf? Ja, es ist nichts anderes hiergegen einzuwenden, als dass die Illegitimität der selbstenthaltenden Mengen etwa schon aus anderen, unabweisbaren Mengeneigenschaften hervorgeht. Ich habe wirklich geglaubt, dies in einfacher Weise zeigen zu können[2]). Kurz gesagt so: die Zerlegung einer selbstenthaltenden Menge M in zwei Teilmengen P und Q giebt einerseits eine Menge mit den beiden Elementen P und Q, andererseits — da M Element in M ist — eine Menge, welche nicht nur P und Q sondern auch andere zur Menge M gehörende Elemente a, b, c . . . enthält; was widersprechend ist. (Beiläufig gesagt, lässt es sich in ähnlicher Weise zeigen, dass überhaupt nicht gleichzeitig N Element in M und M Element in N sein kann). Mit dem Verschwinden der selbstenthaltenden Mengen aus dem Gebiete des Legitimen verschwinden auch die »Menge aller Mengen«, die »Menge aller Gegenstände, welche zu einer gegebenen Menge *nicht* gehören«, die »Menge aller Ordnungszahlen« (*Burali-Fortis* Antinomie[3])

[2]) »Real. Gr.« p. 32.

[3]) Vgl. eine Schrift des Verf. »Über verschiedene Gesichtspunkte bei der Grundlegung der mathematischen Analysis«. Lunds Univ. Asskr. Avd. 2. Bd. 17 (1921). S. 15.

Digitized by Google

u. s. w. Überhaupt lässt sich, meine ich, eine einheitliche und einfache »Theorie der eigentlichen mengentheoretischen Antinomieen« aufstellen. Hier kann dies natürlich nicht ausgeführt werden. Wurde es auch nicht in »Real. Gr.«

Lehrreich ist die bekannte Paradoxie von *Russell*. Sie laboriert mit dem Begriffe »Menge aller Mengen, welche sich selbst nicht enthalten. Dieser Begriff hebt sich selbst auf. Man nehme an, dass jene Menge *(M)* zu den selbstenthaltenden gehörte — dann ist sie nach der Definition nicht selbstenthaltend; man nehme wiederum an, dass M sich nicht enthielte — dann bedeutet dies, dass *M* zu *M* gehört, sich selbst enthält. Die Situation ist unhaltbar. *M* ist widersprechend. Nun haben wir ja aber oben festgestellt, dass keine Menge Element in sich selbst sein kann. Die Menge *M* wird also in der Tat nichts anderes als die »Menge aller Mengen«, und die berühmte Antinomie scheint sich in eine reine Trivialität aufzulösen. Aber sie liegt doch viel tiefer als so, kann nicht so leicht abgefertigt werden. Sie lässt sich so umformen, dass ihre Handhabung viel beschwerlicher wird. Man kann nämlich den Begriff Menge vermeiden und nur von Begriffen sprechen, welche »unter sich fallen«, oder nicht. Es ist leicht, für beide Arten Beispiele zu finden. Der Begriff Gedankengegenstand ist selbst ein Gedankengegenstand, fällt unter sich; dagegen ist der Begriff einer Ellipse nicht eine Ellipse. Wie steht es aber mit dem Begriffe *N* eines nicht selbstenthaltenden Begriffes? *N* muss unter sich fallen oder nicht. Aber sowohl das eine wie das andere führt zu einem Widerspruch. Das ergibt sich nahezu wörtlich ebenso wie oben; nur dass die Menge *M* durch den Begriff *N* ersetzt werden muss (man bemerke, dass es sehr wohl »nicht-selbstenthaltende Begriffe« geben kann, ohne dass »alle« solche eine legitime Menge bilden). Um diese heikle Sachlage zu klären, muss man philosophische Betrachtungen über »Begriff und Gegenstand« anstellen. Mich haben solche Betrachtungen zu der bestimmten Auffassung geführt, dass dieser »flagrante« Widerspruch doch im Grunde nur scheinbar ist[4]). Die Antinomie gehört zu den »uneigentlichen«. Unter diesen ist sie — nur mit einer sogleich zu erwähnenden Ausnahme — vielleicht die einzige ernsthaftere. Dieselben bilden im Ganzen

[4]) Vgl. eine Arbeit des Verf. »Om begreppens dialektiska upprinnelse«. Lund 1915 (schwedisch). S. 82—87, 109—111.

Digitized by Google

eine bunte und teilweise muntere Gesellschaft, welche man unbegrenzt vermehren kann, indem man von sinnlosen Fragestellungen ausgeht, nicht hinreichend scharf analysierte Begriffe einführt oder uneigentliche aber verräterische sprachliche Ausdrucksweisen benutzt u. s. w. Im Ganzen sind sie nicht geeignet einen ernsthaften Mathematiker zu interessieren — geschweige denn zu beunruhigen.

Aber es giebt eine Ausnahme, eine mengentheoretische Antinomie, welche nach meiner Auffassung zu den »uneigentlichen« gehört aber dennoch als die am meisten respektable und bedeutungsvolle von allen dasteht. Ich meine die »Antinomie der endlichen Bestimmbarkeit« (welche bekanntlich in verschiedenen Formen auftreten kann). Der menschliche Intellekt ist *endlich* im folgenden Sinne: jede Definition kann nur eine endliche Anzahl von Bestimmungen enthalten, sowie auch jede Beweisführung nur endlich viele Glieder; und überdies gilt noch, dass jeder Denkakt als eine Verbindung von endlich-vielen Operationssymbolen (in meinem Systeme die vier: *neg*, $\equiv$, $+$, ε) darstellbar ist. Hieraus folgt ja doch wohl, dass eine Menge, in welcher man jedes Element für sich eindeutig definieren kann, höchstens abzählbar unendlich sein kann[5]). Bei einer nicht-abzählbaren Menge sind somit nur in einer abzählbaren Teilmenge alle Elemente individuell definierbar; in der Komplementärmenge kein einziges. Ein zelebres Beispiel: in der nicht-abzählbaren Menge der endlichen und unendlichen Dezimalbrüche giebt es solche, welche eine endliche Intelligenz, wie die menschliche, niemals imstande sein wird, eindeutig zu beschreiben. Die Menge können wir distinkt definieren, aber sie enthält Elemente, bei denen dies nicht möglich ist. Und das kann man mit gutem Grunde paradoxal finden. Die Sache kann auch so ausgedrückt werden: das Problem, eine Regel zu finden, nach welcher jeder Dezimalbruch eindeutig bestimmbar wäre, kann man freilich aufstellen, aber niemals lösen. Und noch weiter: die numerable Teilmenge, deren Elemente wir individualisieren können, sind wir unfähig, wirklich zu numerieren. Wenn man sich nämlich denkt, dass diese Numerierung ausgeführt wäre, so kann man, mit der aufgestellten Tabelle als Ausgangspunkt, mittels des bekannten »Diagonalverfahrens« einen Dezimalbruch konstruieren, welcher

---

[5]) Vgl. »Real. Gr.« S. 50, 51.

Digitized by Google

nicht in der Tabelle vorkommt; die Tabelle ist also unvollständig, gegen die Voraussetzung (die »*Richard*sche Antinomie«).

Wie soll man nun diesen Paradoxieen entkommen? Natürlich könnte man den ganzen Begriff »durch endliche Mittel definiert« einfach fallen lassen (und dies ist wirklich vorgeschlagen worden). Aber es wäre, um ein mildes Wort anzuwenden, wenigstens sehr unangenehm, wenn man gezwungen sein sollte, einen so einfachen und distinkten Begriff abzuweisen. Man ist es auch nicht. Man rettet die Situation einfach dadurch, dass man zwischen dem *logisch möglichen* und dem *für endliche Intelligenzen erreichbaren* einen gehörigen Unterschied macht. Es liegt gar kein Widerspruch darin, dass jeder Dezimalbruch individualisiert werden könnte; aber endliche Mittel reichen dafür nicht aus. Und der letztgenannte Widerspruch löst sich so, dass die Aufstellung der Tabelle überendliche Mittel erfordert, weshalb die mit der Tabelle als Ausgangspunkt konstruierte neue Zahl nur scheinbar mit endlichen Mitteln definiert worden ist. Paradoxieen dieser Art beruhen auf der menschlichen Begrenzung. Die menschliche Intelligenz zeigt über sich selbst hinaus. (Selbstverständlich handelt es sich hier aber nicht um das Vorhandensein von überendlichen persönlichen Wesen irgend einer Art, sondern nur um eine transcendente logische Wirklichkeit).

Nun muss man sich fragen: gibt es oder gibt es nicht unlösbare Probleme, deren Unlösbarkeit nicht so unmittelbar aus der Endlichkeit des Menschenverstandes hervorgeht, sondern mehr verborgen liegt? Wie steht es namentlich mit dem berühmten *Continuumprobleme,* welches so lange allen Lösungsversuchen getrotzt hat? Wahrscheinlichkeitsgründe für Unlösbarkeit sind beigebracht worden. Nun teilte aber unser Kongresspräsident Prof. *Nörlund* in seiner Eröffnungsrede mit, dass *Hilbert* in einer eben in diesen Tagen ausgesandten Schrift einen Weg zur Lösung angedeutet hat. Da aber die Beweisführung noch nicht explizite vorliegt, und auch die vorläufige Skizze allzu kurze Zeit zugänglich gewesen ist, so muss man die Frage »lösbar oder unlösbar?« bis auf weiteres als offen ansehen.

Aber schon die blosse Möglichkeit der Existenz von verdecktendlichunlösbaren Fragen könnte ja verstimmend wirken. Man darf jedoch ruhig sein. Erstens kann es nur eine ganz besonders eigenartige Klasse von »mengentheoretischen« Fragen sein, welche (offenbar oder verdeckt) endlich-unlösbar sind. Zweitens

Digitized by Google

ist es sicher keine grössere Kunst, für die Lösbarkeit scharfe Bedingungen anzugeben, welche, wenngleich nicht notwendig, so doch hinreichend sind, und welche überdies so grosse Weiten umspannen, dass man zufrieden sein kann.

Viele, vielleicht die meisten Mathematiker betrachten es als selbstverständlich, dass jede mathematische Aufgabe, welche wir aufstellen können, auch für uns lösbar sei (oder doch nur in dem Sinne unlösbar, dass wir, wie z. B. bei »Quadratura circuli«, nachweisen können, dass sie an einem inneren Widerspruch leidet). »In der Mathematik giebt es kein Ignorabimus« soll als ein Axiom gelten. Dies ist doch wohl etwas übereilt.

In Bezug auf die mengentheoretischen Paradoxieen überhaupt sind wir indessen so weit gekommen, dass (mit Recht oder Unrecht?) behauptet werden konnte, dass sich eine wirklich unvermeidliche Paradoxie niemals hat nachweisen lassen. Wenn dies richtig ist, so war es auch falscher Alarm, als man davon sprach, dass die Grundlagen der Mathematik zu schwanken begonnen hätten. Und man hat gar keinen Grund zu befürchten, dass sie es in der Zukunft tun werden. Aber freilich wäre es sehr interessant, wenn es sich strenge beweisen liesse, dass unbesiegbare und daher verhängnisvolle Widersprüche niemals auftauchen könnten (vgl. unten).

In möglichst scharfem Gegensatz zu der oben dargestellten Auffassung steht eine Anschauung, welche in den letzten Jahren ziemlich viel Wesens von sich gemacht hat, nämlich der sogenannte *Intuitionismus* (der Name nicht besonders passend), zu dessen Vertretern namentlich *Brouwer* gehört. Das Wesentliche in dieser Lehre scheint nichts anderes zu sein als dies: man fordert eine streng konsequente Durchführung des *Kronecker*schen Programmes, dass die Mathematik sich nur mit solchen Dingen beschäftigen soll, »welche man vorgefunden hat«. Als mathematisches Objekt (als »existierend«) soll nur das gelten, für welches ein (menschlich mögliches) Konstruktionsverfahren vorliegt oder doch sichergestellt ist. Jeder Existenzbeweis, welcher dies nicht berücksichtigt, soll als verfehlt gelten. Bei irgend einem so oder so so bestimmten Gegenstande A (z. B. eine ganze Zahl, welche gewisse Bedingungen erfüllen soll) sind drei ver-

Digitized by Google

schiedene Fälle denkbar: 1) Man hat *A* konstruiert oder wenigstens als konstruierbar dargelegt — dann existiert *A*; 2) man hat beweisen können, dass *A* eine Ungereimtheit ist; 3) weder das eine noch das andere ist bisher gelungen — dann darf man nicht sagen, was natürlich erscheint, dass *A* möglicherweise existiert, möglicherweise nicht existiert, sondern es soll heissen, dass *A* *weder* existiert *noch* nicht existiert. Die Alternative entweder — oder reicht nicht hin; es gibt auch eine dritte: weder — noch. Das »Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten« gilt hier nicht (jedenfalls nicht unbedingt)! Man betrachtet dies wohl als eine unvermeidliche Konsequenz der äussersten Prinzipien, welche man proklamiert hat. Und ich will nicht bestreiten, dass es sich so verhalten kann. So etwas kann sich ereignen, wenn man der menschlichen Gedankenkapazität eine allzu dominierende Rolle erteilt und eine Frage wie »Existenz oder Nicht-Existenz« von den wechselnden Standpunkten der menschlichen Wissenschaft abhängen lässt. Der Intuitionismus weist andere ähnliche Besonderheiten auf. Und man fragt sich gern: hat wirklich diese Lehre eine Zukunft?

Der konsequente Intuitionismus zeichnet sich, scheint es mir, durch eine extreme Feigherzigkeit aus. Und die Anhänger desselben müssen wohl eine Anschauung wie die oben entwickelte als eine extreme Dummdreistigkeit betrachten. Aber sie scheinen ihrerseits den sehr guten Grundsatz ganz über Bord zu werfen, dass man *alle logischen Möglichkeiten offen halten soll.* Dieser Grundsatz ist doch im höchsten Grade beherzigenswert. Ja in so hohem Grade, dass er wohl verdient, dass man für ihn etwas riskiert. Aber das wollen die Herren Intuitionisten nicht. Schon bei der geringsten Gefahr retten sie sich so zu sagen durch die Flucht. Handelt es sich nun um einen Schreck vor den Antinomieen, so ist zunächst zu sagen: wenn man wirklich nicht zu beseitigende Widersprüche konstatieren könnte, so müsste doch erwogen werden, ob sich nicht irgend eine andere Hülfe finden liesse als dieser letzte Ausweg, die Flucht zu ergreifen. Wenn es dagegen richtig ist, was ich kühn genug war, geltend zu machen, dass der Alarm wegen der bisher erschienenen Antinomieen eigentlich falsch war, so bleibt nur die sehr unwahrscheinliche Möglichkeit offen, dass die Zukunft gefährlichere Antinomieen bringen könnte. Vor dieser Möglichkeit das Gewehr zu strecken, wäre nicht sehr tapfer. Ferner ist es offenbar und

Digitized by Google

wurde mehrmals hervorgehoben, dass eine radikale Durchführung der intuitionistischen Ideen (sei es dass dieselben auf einem Schreck vor den Antinomieen oder auf anderen Gründen beruhten) eine wahre Revolution in den mathematischen Methoden und Ausdrucksweisen bedeuten würde — innerhalb der Gebiete, welche man überhaupt zu betreten wagen dürfte. *Das* würde wirklich eine Art von »Ragnarök« werden, wenn auch teilweise nur formaler Natur. Aber gleichzeitig ein Ungewitter, dem Niemand genötigt wäre, sich auszusetzen.

Dies über den »Intuitionismus«. Auf andere, von meiner eigenen abweichende Auffassungen in mathematisch-prinzipiellen Fragen näher einzugehen, liegt nicht im Plane dieses kleinen Vortrages. Die hierher gehörende Litteratur der letzen Dezennien incl. der allerletzten Zeit ist ja sehr reichhaltig und offenbart viele verschiedene Standpunkte. Man findet darin viele vortreffliche Dinge — sowie auch weniger vortreffliche. Und über Relationen zu meiner eigenen Denkart könnte viel zu sagen sein. Aber das muss hier bei Seite gelassen werden. Ich will mir nur noch gestatten, weiter unten ein paar Worte über die *Hilbert*schen Untersuchungen zu sagen.

Was ich also die Ehre gehabt habe, hier darzustellen, gibt mir ungezwungenen Anlass, einiges über das Verhältnis der Mathematik zur Philosophie zu äussern. Eine wirklich tiefgehende Grundlegung der Mathematik ist dazu geeignet, wenigstens in ihren abstraktesten Partieen von fundamentaler Bedeutung auch für eine allgemeine Erkenntnistheorie und damit für die Philosophie überhaupt zu werden. Um sich davon zu überzeugen, dass die Philosophie des Beistandes der Mathematik bedarf, ist es nicht notwendig, dass man sich in sehr ausführliche Studien in humanistisch-philosophische Bücher und Abhandlungen vertieft. In dieser Hinsicht am aller lehrreichsten sind vielleicht diejenigen Philosophen, welche die Bedeutung der Mathematik gar nicht verneinen, sondern, wie jemand gesagt hat, dieselbe sogar in die Wolken erheben — und gleichzeitig böse maltraitieren. Andererseits kann es bisweilen auch vorkommen, dass Mathematiker in einer Weise philosophieren, welche so zu sagen allzu mathematisch ist, namentlich so, dass

Digitized by Google

man das Mathematisch-technische bez. Terminologische eine ungehörige Rolle spielen lässt.

Wie schon angedeutet, verfolgten meine eigenen vieljährigen Spekulationen über hierher gehörende Dinge vom Anfang an in erster Hand einen philosophischen Zweck. Näher bestimmt: es schwebte mir vor *ein verfeinerter objektiver Realismus*. Die Verfeinerung aber konnte nur die Mathematik geben. Daher war auch von der Grundlegung der Mathematik die Rede. Für den näheren Verlauf meiner Erwägungen habe ich hier nur sehr unvollständig Rechenschaft ablegen können. Ich musste mich hauptsächlich auf einige fragmentarische Proklamationen einschränken — Selbstdeklarationen ohne weitere Motivierung. Ausführliche Darstellungen finden sich in mehreren Schriften aus den letzteren Jahren. Andere werden folgen, welche namentlich die philosophische Seite der Sache mehr direkt behandeln sollen.

Von *Hilbert* kann folgendes zitiert werden: »ich möchte der Mathematik den alten Ruf der unanfechtbaren Wahrheit, der ihr durch die Paradoxieen der Mengenlehre verloren zu gehen scheint, wiederherstellen; aber ich glaube, dass dies bei voller Erhaltung ihres Besitzstandes möglich ist«. Etwas ähnliches war auch ein Hauptpunkt in meinem eigenen Programme. Jedenfalls wurde eine Anordnung des Ganzen angestrebt, zufolge der unvermeidliche Widersprüche erweislich für immer ausgeschlossen wären. Aber die allgemeine erkenntnistheoretische Einstellung und die Rücksicht auf die Bedeutung der Mathematik für die ganze Weltanschauung hatten zur Folge, dass die Situation bei mir eine andere wurde. Hiermit hängt zusammen, dass »Grundlegung der Mathematik« gleichbedeutend wurde mit »Grundlegung der Mengenlehre«, während bei *Hilbert* alles einen mehr formellen Charakter hat. Ganz natürlich verzichte ich jetzt auf nähere Äusserungen über das Hilbertsche System, da dasselbe, so viel ich weiss, noch nicht fertig gebildet ist — was auch nach dem Erscheinen der von Nörlund erwähnten, ohne Zweifel hochinteressanten neuen Abhandlung von H. gelten dürfte.

Aber kehren wir jetzt zu der Frage zurück, von der wir ausgingen. Unabhängig davon, was über Zukunftsmöglichkeiten bez. Zukunftsunmöglichkeiten gezeigt werden kann, wage ich

Digitized by Google

es, geltend zu machen, dass bisher Nichts vorgefallen ist, was geeignet wäre, die Gemütsruhe eines Mathematikers zu stören — Nichts was motivieren könnte, sei es dass man die Flucht ergreift, sei es dass man in eine unheimliche »Jüngste-Gerichts-Stimmung« versinkt. Das Einzige wäre etwa *eine* oben angegebene Kategorie von mengentheoretischen Antinomieen. Diese aber will uns nur von neuem an unsere Sterblichkeit, oder richtiger Endlichkeit erinnern und den Blick dafür schärfen, dass es auch auf dem mathematischen Felde eigentümliche Gegenden geben kann, wo jeder menschliche Versuch zum Anbauen ganz ohne Erfolg bleiben muss. Für mich persönlich ist so zu sagen das Fazit aus den mengentheoretischen Paradoxieen, dass auch die reine Mathematik ihre »Ignorabimus« haben kann. Lässt sich aber wirklich das Gegenteil beweisen, so ist dies — um so besser! Wenn nicht, so können wir, auch dieser Art von menschlicher Begrenzung uns voll bewusst, noch immer die Fahne der Mathematik hoch halten.

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR L'EXISTENCE DES SOLUTIONS RÉELLES ET CONTINUES DE L'ÉQUATION FONCTIONELLE D'ABEL

PAR

R. TAMBS LYCHE

1. Étant donnée l'équation fonctionelle d'*Abel*[1])

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + c,$$

où $f(x)$ désigne une fonction donnée et c une constante non nulle, de différents problèmes se présentent selon la nature de la fonction $f(x)$. La plupart des auteurs qui ont traité cette équation depuis *Abel*, supposent $f(x)$ analytique dans une certaine région et cherchent des solutions analytiques. Le problème qui sera exposé ici est un autre; je suppose que $f(x)$ est une fonction réelle définie dans un certain ensemble de points réels; alors je vais chercher les conditions dans lesquelles l'équation proposée possède des solutions réelles et, en particulier, des solutions continues.

Si l'on considère le cas très simple, où

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

a, b, c et d étant des constantes réelles, on trouve sans peine la solution

$$\varphi(x) = \frac{1}{\log\left|\frac{\varsigma_2}{\varsigma_1}\right|} \cdot \log\left|\frac{(d - \varsigma_2)x - b}{(d - \varsigma_1)x - b}\right|$$

de l'équation

$$\varphi\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right) = \varphi(x) + 1\ ^2) \qquad \text{(a)}$$

[1]) *Abel*: Oeuvres, T. II, p. 36.

[2]) la constante c de l'équation d'Abel sera, pour plus de simplicité, remplacée par 1.

Digitized by Google

en désignant par ς_1 et ς_2 les racines de l'équation de second degré $f(x) = x$. Mais cette solution suppose que ς_1 et ς_2 sont réels et distincts en valeur absolue. Si, au contraire, ς_1 et ς_2 sont imaginaires on trouve dans le cas général, que toute solution de l'équation (*a*) doit être totalement discontinue[1]). Proposons donc les deux problèmes suivants:

1°. En désignant par $f(x)$ une fonction réelle de la variable réelle x, définie dans un ensemble E, quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1 \qquad (b)$$

admette comme solution une fonction réelle $\varphi(x)$, définie pour toute valeur réelle de x et satisfaisant à l'équation (*b*) pour toute valeur de x appartenant à E?

2°. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle solution $\varphi(x)$ puisse être continue, au moins dans un intervalle de longueur finie?

2. Désignons par $f_n(x)$ l'iterée $n^{ième}$ de $f(x)$, définie par les équations

$$f_0(x) = x, \quad f_n(x) = f[f_{n-1}(x)], \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Pour que l'équation $\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$ admette dans E une solution $\varphi(x)$ définie pour toute valeur réelle de x il faut et il suffit que l'équation $f_n(x) = x$ ne subsiste pour aucune valeur de x dans E pour aucun indice naturel n[2]).

Désignons pour cela par $B(f)$ un ensemble de points réels ayant la double propriété: il n'existe pas dans $B(f)$ deux points a et b pour lesquels une relation $f_m(a) = f_n(b)$ a lieu, m et n étant des indices $\gtrless 0$; á chaque point réel x correspond dans $B(f)$ un point a pour lequel $f_p(x) = f_q(a)$ en désignant par p et q des indices convenables $\gtrless 0$. Un tel ensemble $B(f)$ sera appelé une base pour $f(x)$ —. Il faut remarquer que je me suis appuyé, dans ma démonstration de l'existence d'une base pour $f(x)$ au théorème de *Zermelo*; *M. Kuratowski* a remarqué[3]), qu'on peut éviter l'emploi de ce théorème en appliquant seulement l'axiome du choix; il serait donc d'importance, pour la solution du pro-

[1]) Videnskapsselskapets Forhandlinger for 1924, no. 2.
[2]) Fundamenta mathematicae, T. V, p. 331.
[3]) l. c. p. 332.

Digitized by Google

blème proposé, de trouver les cas où l'on peut directement trouver une base pour la fonction $f(x)$.

Soit alors $B(f)$ une base pour $f(x)$ et soit $\psi(x)$ une fonction réelle, définie arbitrairement dans $B(f)$. Définissons donc la fonction $\varphi(x)$ pour toute valeur réelle de x en posant

$$\varphi(x) = \psi(a) + q - p$$

où a désigne le point de $B(f)$ pour lequel on a $f_p(x) = f_q(a)$. La fonction $\varphi(x)$ ainsi définie est alors la solution la plus générale de l'équation (b). — Cette solution est évidemment en général totalement discontinue.

3. Pour trouver la condition pour l'existence des solutions continues, on pourrait spécialiser les suppositions sur la fonction $f(x)$ par exemple en la supposant continue; mais, comme il suit de l'exemple $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ déjà mentionnée, celà n'assurerait point l'existence des solutions continues; et l'on peut d'autre côté aisément indiquer des fonctions $f(x)$ totalement discontinues pour lesquelles l'équation (b) correspondante admet des solutions continues.

Je vais d'abord donner quelques définitions utiles. — Si pour deux points x et y il existe des indices p et q pour les quels $f_p(x) = f_q(y)$, je dis, avec *M. Kuratowski*, que x et y sont de la même classe; si, de plus, $p = q$ j'appelle x et y des points associés.

Soit maintenant x_i et y_i pour $i = 1, 2, 3, \ldots$ deux suites de points réels; si, pour chaque valeur de i, x_i et y_i sont de la même classe je dis que les suites (x_i) et (y_i) sont parallèles; si, de plus, quel que soit le nombre positif N, il existe des indices $i > N$ pour lesquels x_i et y_i ne sont pas associés, les suites (x_i) et (y_i) sont distinctes; au contraire elles sont associées si à partir d'un certain indice i_0, x_i et y_i sont des points associés.

Cela posé, un point réel $x = \xi$ sera appelé régulier s'il a les deux propriétés suivantes:

I. Si ξ est la limite commune de deux suites parallèles, celles-ci doivent être associées.

II. S'il existe une suite de points $z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots$ tendant vers ξ, où tous les points z_i sont de même classe que ξ et associés entre eux, les points z_i doivent être associés à ξ.

Digitized by Google

4. Lemme I. Si le point $x = \xi$ n'est pas la limite commune de deux suites distinctes, il existe une quantité positive δ, telle que tout point x pour lequel $0 < |x - \xi| \leqq \delta$ est un point régulier.

Démonstration. Montrons d'abord l'existence d'une quantité $\varsigma > 0$ pour laquelle tout point de l'intervalle $\xi - \varsigma \leqq x \leqq \xi + \varsigma$ a la même propriété que ξ: il n'est pas la limite commune de deux suites distinctes. En effet, soit r une quantité positive quelconque. Si $\varsigma = r$ n'a pas la propriété demandée il existe un point η_1 tel que $0 < |\eta_1 - \xi| \leqq r$ où η_1 est la limite commune de deux suites distinctes $(x_i^{(1)})$ et $(y_i^{(1)})$. Posons donc $|\eta_1 - \xi| = 2r_1$; si $\varsigma = r_1$ n'a pas la propriété demandée il existe un point η_2 tel que $0 < |\eta_2 - \xi| \leqq r_1$, où η_2 est la limite commune de deux suites distinctes $(x_i^{(2)})$ et $(y_i^{(2)})$. Posons alors $|\eta_2 - \xi| = 2r_2$, et continuons ainsi. Je dis que ce procédé doit conduire à une certaine quantité $\varsigma = r_s$ ayant la propriété demandée. Car, sinon, on obtiendrait une suite illimitée de points $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s, \ldots$ tendant vers ξ où à chaque η_s correspondrait des suites distinctes $(x_i^{(s)})$ et $(y_i^{(s)})$ tendant toutes les deux vers η_s. Supposons encore, ce qui est évidemment admissible, que $x_i^{(s)}$ et $y_i^{(s)}$ ne sont pas associés. Choisissons donc, pour chaque valeur de s un indice $i = i_s$ assez grand pour que

$$|x_{i_s}^{(s)} - \eta_s| < \frac{1}{2^{s-1}}, \quad |y_{i_s}^{(s)} - \eta_s| < \frac{1}{2^{s-1}}$$

d'où il suit

$$|x_{i_s}^{(s)} - \xi| \leqq |x_{i_s}^{(s)} - \eta_s| + |\eta_s - \xi| < \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{r_1}{2^{s-1}} = \frac{r_1 + 1}{2^{s-1}}$$

et de même $|y_{i_s}^{(s)} - \xi| < \frac{r_1 + 1}{2^{s-1}}$; donc les deux suites $(x_{i_s}^{(s)})$ et $(y_{i_s}^{(s)})$ pour $s = 1, 2, 3, \ldots$ ayant ξ pour limite commune, étaient distinctes, contraire à l'hypothèse; donc un certain $\varsigma = r_s$ a la propriété signalée.

Passons alors à la démonstration du lemme. Soit ς la quantité positive dont l'existence vient d'être établie. Si $\delta = \varsigma$ n'a pas la propriété demandée, il doit exister un point u_1, tel que $0 < |\xi - u_1| \leqq \varsigma$ et auquel correspond une suite de points $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \ldots, v_k^{(1)}, \ldots$ de même classe que u_1 tous associés entre eux mais non à u_1; posons $|\xi - u_1| = 2\varsigma_1$; si encore $\delta = \varsigma_1$ n'a pas la propriété demandée, il suit l'existence d'un point u_2 tel que

Digitized by Google

$0 < |\xi - u_2| \gtreqless \varsigma_1$ et une suite correspondante $v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \ldots, v_k^{(2)}, \ldots$ de points associés entre eux mais non à u_2 et tendant vers u_2; posons $|\xi - u_2| = 2\varsigma_2$ et continuons. Supposons qu'on n'arriverait pas par ce procedé à une quantité $\delta = \varsigma_r$ ayant la propriété signalée. Alors on aurait une suite illimitée de points $u_1, u_2, \ldots, u_r, \ldots$ tendant vers ξ, où il correspondrait à chaque point u_r une suite de points $v_1^{(r)}, v_2^{(r)}, \ldots, v_k^{(r)}, \ldots$ de la même classe que u_r associés entre eux mais non à u_r. Mais cela est impossible. Soit, en effet, e un nombre naturel quelconque et posons $\frac{1}{2}|u_e - u_{e+1}| = \varepsilon_e$; soit t_e un indice assez grand pour que $|u_e - v_{t_e}^{(e)}| < \varepsilon_e$. Il suit

$$|\xi - v_{t_e}^{(e)}| \gtreqless |\xi - u_e| + |u_e - v_{t_e}^{(e)}| < |\xi - u_e| + \varepsilon_e$$

donc les points $v_{t_e}^{(e)}$ tendent vers ξ pour $e = 1, 2, 3, \ldots$ et d'autre part on a

$$|v_{t_e}^{(e)} - v_{t_{e+1}}^{(e+1)}| \gtreqless |u_e - u_{e+1}| - |u_e - v_{t_e}^{(e)}| - |u_{e+1} - v_{t_{e+1}}^{(e+1)}|$$
$$> 2\varepsilon_e - \varepsilon_e - \varepsilon_{e+1} = \varepsilon_e - \varepsilon_{e+1};$$

mais ε_e tendant vers zéro, cette différence est plus grande que zéro pour une infinité de valeurs de e. Donc on aurait les deux suites distinctes (u_e) et $(v_{t_e}^{(e)})$ tendant toutes les deux vers ξ, contraire à l'hypothèse.

Il suit donc comme corollaire qu'à tout point régulier ξ correspond une quantité positive δ, telle que tout point de l'intervalle $\xi - \delta \gtreqless x \gtreqless \xi + \delta$ est en même temps régulier.

Lemme II. A chaque point régulier ξ correspond une quantité positive τ, telle qu'on peut, en choisissant convenablement les éléments de la base $B(f)$, obtenir qu'à tout point x de l'intervalle $\xi - \tau \gtreqless x \gtreqless \xi + \tau$ correspond un élément a de $B(f)$ et un indice $n \gtreqless 0$ tels que $f_n(x) = f_n(a)$.

Démonstration. Le point ξ étant régulier il a d'abord la propriété suivante: il existe une quantité positive σ telle que, si deux points de l'Intervalle $\xi - \sigma \gtreqless x \gtreqless \xi + \sigma$ sont de même classe, ils sont associés. Supposons, en effet, qu'il ne fût pas ainsi, et soit σ une quantité positive quelconque; dans l'intervalle $(\xi - \sigma, \xi + \sigma)$ se trouveraient donc deux points x_1 et y_1 de même classe, mais non associés; si aucun des points x_1 et y_1 n'est identique à ξ, soit y_1 celui qui est plus près de ξ, et

Digitized by Google

posons $|\xi - y_1| = 2\sigma_1$; si un des points, soit y_1, est identique à ξ posons $|\xi - x_1| = 2\sigma_1$. Cherchons alors dans l'intervalle $(\xi - \sigma_1, \xi + \sigma_1)$ deux points x_2, y_2 de même classe, mais non associés. En continuant on trouverait évidemment une couple de suites distinctes (x_i) et (y_i) ayant ξ pour limite commune, si y_i est différent de ξ une infinité de fois, et, dans le cas contraire, une suite de points x_i tendant vers ξ, étant tous de même classe que ξ; désignons par $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$ cette suite; aucun des points z_k n'est associé à ξ. Soit z_{k_1} le premier qui n'est pas associé à z_1 et posons

$$z_1 = \overline{x}_1, \quad z_{k_1} = \overline{y}_1;$$

soit alors z_{k_2} le premier point z_k après z_{k_1} qui n'est pas associé à z_{k_1} et posons $z_{k_1} = \overline{x}_2$, $z_{k_2} = \overline{y}_2$; en contiuant ainsi il résulterait encore une couple de suites distinctes $(\overline{x}_r)$ et $(\overline{y}_r)$ ayant ξ pour limite commune; donc, à partir d'un certain point z_{k_r} tous les points z_k suivants doivent être associés à z_{k_r}. Donc il résulterait une suite de points $z_{k_r}, z_{k_{r+1}}, \ldots$ de même classe que ξ tous associés entre eux, mais non à ξ, et tendant vers ξ; mais cela est impossible, ξ étant régulier.

Désignons maintenant par $B(f)$ une base quelconque pour $f(x)$ et soit $\tau = \sigma$ la quantité don l'existence vient d'être établie. Désignons par $\overline{B}$ l'ensemble de tous les points de $B(f)$ ayant la propriété suivante: à chaque point $\overline{a}$ de $\overline{B}$ correspond dans l'intervalle $\xi - \tau \leqq x \leqq \xi + \tau$ un point x de même classe que $\overline{a}$. Soit alors $B_1(f)$ l'ensemble de tous les points suivants: tous les points de $B(f)$ qui n'appartiennent pas à $\overline{B}$; un et un seul point de l'intervalle $\xi - \tau \leqq x \leqq \xi + \tau$ correspondant à chaque classe contenue dans $\overline{B}$. L'ensemble $B_1(f)$, qui est évidemment de nouveau une base pour $f(x)$ a la propriété démandée. Car, x étant un point arbitraire de l'intervalle $(\xi - \tau, \xi + \tau)$, il correspond à cet x un élement $\overline{a}$ dans $B(f)$ et à cet $\overline{a}$ un élement a (où $a = x$ où $a \neq x$ suivant les cas) dans $B_1(f)$, où x et a sont de même classe; mais tous les deux étant dans l'intervalle $(\xi - \tau, \xi + \tau)$ ils sont associés.

5. Théorème. Si $x = \xi$ est un point non régulier toute solution $\varphi(x)$ de l'équation $\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$ doit être discontinue pour $x = \xi$.

Digitized by Google

Si $x = \xi$ est un point régulier pour $f(x)$ l'équation $\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$ a au moins une solution $\varphi(x)$ qui est continue dans l'intervalle $(\xi - \tau, \xi + \tau)$, τ étant une quantité positive. Cette solution $\varphi(x)$ n'est pas, en général, continue en aucun point en dehors de l'intervalle $(\xi - \tau, \xi + \tau)$, si τ est choisi aussi grand que possible.

Démonstration. Le premier point du théorème est très facile à démontrer; supposons, en effet, que ξ est un point non régulier et $\varphi(x)$ une solution continue pour $x = \xi$. Deux cas sont à traiter. Soit en premier lieu (x_r) et (y_r) deux suites distinctes tendant vers ξ; pour une infinité de valeurs de r on a donc des indices $p_r \neq q_r$ tels que $f_{p_r}(x_r) = f_{q_r}(y_r)$; donc

$$|\varphi(x_r) - \varphi(y_r)| = |p_r - q_r| \geqq 1$$

ce qui n'est pas possible si $\varphi(x)$ est continue en ξ. Soit en second lieu ξ la limite d'une suite de points $z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots$ associés entre eux et appartenant à la même classe que ξ sans être associés à ξ. Puisque $\varphi(z_r) = \varphi(z_1)$ il suit $|\varphi(z_r) - \varphi(\xi)| = |\varphi(z_1) - \varphi(\xi)| \geqq 1$; donc $|\varphi(z_r) - \varphi(\xi)|$ ne tendrait pas vers zéro.

Pour démontrer la seconde partie du théorème, appliquons le lemme II. Définissons la fonction $\psi(x)$ dans $B(f)$ de la manière suivante:

Si $x = a$ est un élément de $B(f)$ appartenant à l'intervalle $(\xi - \tau, \xi + \tau)$ posons $\psi(x) = k$, k étant une constante choisie à l'avance.

Si $x = a'$ est un élement de $B(f)$ qui n'appartient pas à l'interval $(\xi - \tau, \xi + \tau)$, $\psi(x)$ peut être quelconque.

Considérons la solution $\varphi(x)$ correspondante de l'èquation considerée. Si x est un point quelconque de l'intervalle $(\xi - \tau, \xi + \tau)$ et a l'élément correspondant de $B(f)$, appartenant, d'après ce qui précède, au même intervalle, on a, pour un certain indice $n \geqq 0$, $f_n(x) = f_n(a)$, donc $\varphi(x) = \varphi(a) = k$. Donc $\varphi(x)$ est constant dans tout l'intervalle $(\xi - \tau, \xi + \tau)$.

Il reste donc seulement à démontrer, qu'une solution $\varphi(x)$ qui est continue dans l'interval $(\xi - \tau, \xi + \tau)$ ne l'est pas, en général, en dehors de cet intervalle, si τ est choisi aussi grand que possible. Si τ peut croître sans limite l'énoncé est trivial; supposons donc que τ admet un maximum ς. Il faut donc seulement montrer l'existence des fonctions $f(x)$, pour lesquelles τ admet un maximum ς, et telles que toute solution, continue

Digitized by Google

dans l'intervalle $\xi - \varsigma < x < \xi + \varsigma$, est discontinue en tout point en dehors de cet intervalle, même en les points réguliers; je vais donner l'exemple d'une fonction $f(x)$, n'admettant que des points réguliers et satisfaisant aux conditions énoncées.

Soit, en effet, $f(x)$ la fonction définie dans l'ensemble E de tous les point réels de la manière suivante:

si x est rationnel, posons $f(x) = x + 1$
» x » irrationnel, » $f(x) = x - 1$.

On voit alors sans peine qu'on a $f_n(x) = x \pm n$ suivant que x est rationnel ou irrationnel, et que tous les points de la même classe que x sont contenus dans la formule $x \pm n$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$. Deux points x et y ne sont jamais associés; et deux points de même classe x et y satisfont donc à l'inégalité $|x - y| \geqq 1$. De là il suit que tout point est régulier.

Soit alors ξ un point quelconque et considérons l'ensemble de tous les points de l'intervalle

$$\xi - \frac{1}{2} \leqq x < \xi + \frac{1}{2}.$$

Deux points a et b de cet ensemble ne sont pas de même classe, car $|a - b| < 1$. Soit d'autre part x un point réel quelconque et n l'entier pour lequel $\xi - \frac{1}{2} \leqq x - n < \xi + \frac{1}{2}$; on a donc

$$\left.\begin{array}{l} f_n(x-n) = x \text{ pour } n \geqq 0, \\ f_{-n}(x) = x - n \text{ » } n < 0, \end{array}\right\} \text{pour } x \text{ rationnel,}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_n(x) = x - n \text{ » } n \geqq 0, \\ f_{-n}(x-n) = x \text{ » } n < 0, \end{array}\right\} \text{pour } x \text{ irrationnel.}$$

Donc l'ensemble des points de l'intervalle $\xi - \frac{1}{2} \leqq x < \xi + \frac{1}{2}$ est une base $B(f)$ pour $f(x)$ satisfaisant évidemment aux conditions du lemme II; et τ étant nécessairement $\geqq \frac{1}{2}$ on a $\varsigma = \frac{1}{2}$.

Soit donc $\varphi(x)$ une solution de l'équation $\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$, continue dans l'intervalle $\xi - \frac{1}{2} < x < \xi + \frac{1}{2}$. Désignons par η un point en dehors de cet intervalle et soit m l'entier pour lequel

Digitized by Google

$$\xi - \frac{1}{2} \gtrless \eta - m < \xi + \frac{1}{2},$$

donc $|m| \gtrless 1$. Supposons, pour fixer les idées, η rationnel; donc $\varphi(\eta) = \varphi(\eta - m) + m$; soit donc $\delta > 0$ une quantité inférieure à $\xi + \frac{1}{2} - \eta + m > 0$ et $\eta + h$ une quantité irrationnelle entre η et $\eta + \delta$; alors

$$\varphi(\eta + h) = \varphi(\eta + h - m) - m$$

et

$$\begin{aligned} |\varphi(\eta + h) - \varphi(\eta)| &= |\varphi(\eta + h - m) - \varphi(\eta - m) - 2m| \\ &\gtrless 2 \cdot |m| - |\varphi(\eta + h - m) - \varphi(\eta - \mathrm{m})|, \end{aligned}$$

quantité qui ne tend pas vers zéro avec δ; donc $\varphi(x)$ est discontinue pour $x = \eta$.

Remarquons enfin qu'il suit immédiatement qu'une équation $\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$, admettant une solution $\varphi(x)$ continue en un point ξ admet en même temps une solution $\varphi_1(x)$ continue dans un intervalle fini $(\xi - \tau, \xi + \tau)$.

Digitized by Google

Digitized by Google

OM INTERPOLATIONSRÆKKER

AF

N. E. NÖRLUND

Foredraget indeholdt en Undersøgelse af Konvergensforholdene hos den Stirlingske Interpolationsrække:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x(x^2 - 1^2)(x^2 - 2^2) \ldots (x^2 - n^2),$$

den Newtonske Række:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x(x-1)(x-2) \ldots (x-n)$$

og den dermed beslægtede Fakultetrække:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x(x+1)(x+2) \ldots (x+n)}.$$

En udførlig Fremstilling af disse Undersøgelser vil fremkomme omtrent samtidig med denne Beretning i en Bog med Titlen: »Sur les séries d'interpolation«. Der henvises desuden til Forfatterens Afhandlinger i Annales scientifiques de l'École Normale supérieure sér. 3, t. 39, p. 343—403; t. 40, p. 35—54 og i Det kgl. danske Videnskabernes Selskabs Skrifter 8. Række, Bd. VII, p. 211—280.

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR LA DÉTERMINATION D'UNE CLASSE DE FONCTIONS ANALYTIQUES PAR LEURS VALEURS DANS UN ENSEMBLE DONNÉ DE POINTS

PAR

FOLKE MALMQUIST

Désignons par E la classe de fonctions $f(z)$ de la variable complexe $z = re^{i\theta}$, lesquelles possèdent les propriétés suivantes:

1° $f(z)$ est une fonction holomorphe de z pour $|z| < 1$.

2° On a

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta < M$$

pour $0 \leq r < 1$, M désignant une constante indépendante de r. Cette classe est identique à la classe des séries de Taylor

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$$

pour lesquelles la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu|^2$ converge. C'est là une conséquence de la formule connue

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta = \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu|^2 r^{2\nu}; \; (r < 1).$$

M. Fatou[1]) a démontré que la limite $\lim_{r=1} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ existe presque partout pour chaque fonction de la classe E et que l'intégrale

$$\int |f(e^{i\theta})|^2 \, d\theta$$

[1]) *P. Fatou*, Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Mathematica, 30 (1906).

Digitized by Google

existe au sens de Lebesgue. Cette intégrale et toutes les suivantes sont étendues sur le cercle $|z| = 1$, sauf indication contraire. On savait[1]) aussi qu'une fonction $f(z)$ de la classe considérée est déterminée quand on en connaît les valeurs-limites $f(e^{i\theta})$ sur le cercle $|z| = 1$ et que l'on peut établir la formule de Cauchy

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(e^{i\theta})\, dz}{z - x}$$

pour $|x| < 1$.

Soit

(1) $$u_1(z),\ u_2(z) \ldots .\ u_n(z) \ldots .$$

une suite illimitée de fonctions de la classe E. Nous pouvons démontrer le lemme suivant.

I. *Si la suite (1) converge en moyenne vers une fonction de carré intégrable $u(e^{i\theta})$ sur le cercle $|z| = 1$, la suite convergera uniformément à l'intérieur de ce cercle*[2]) *vers une fonction $u(z)$ de la classe E, fonction qui prend presque partout les valeurs-limites $u(e^{i\theta})$.*

De l'hypothèse

$$\int |u_m(z) - u_n(z)|^2 |dz| < \varepsilon^2 \text{ pour } m > n > N$$

on conclut, en appliquant à l'intégrale de Cauchy l'inégalité de Schwarz, qu'on a

$$|u_m(x) - u_n(x)| < K \cdot \varepsilon$$

pour $|x| < r < 1$, $m > n > N$. K désigne une constante indépendante de x et de N. Cette inégalité montre la convergence uniforme. On a pour $|x| < 1$

$$u(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{u_n(z)\, dz}{z - x} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{u(e^{i\theta})\, dz}{z - x}.$$

Cette fonction appartient à la classe E et prend presque partout les valeurs-limites $u(e^{i\theta})$.

Pour faciliter l'exposition, nous allons introduire les définitions que voici.

---

[1]) Pour ce sujet voir: *F. u. M. Riez*, Über die Randwerte einer analytischen Funktion, Quatrième Congrès de Stockholm (1916).

[2]) Nous entendons par cela, que la convergence est uniforme dans tous les cercles, $|z| < r < 1$.

Digitized by Google

Une suite (1) est appelée complète (pour la classe E) si pour une fonction $f(z)$ de cette classe, les relations d'orthogonalité

$$\int \overline{f(z)}\, u_\nu(z)|dz| = 0;\ (\nu = 1, 2\ldots.)$$

entraînent $f(z) = 0$.

La suite (1) est appelée orthogonale et normale si les relations

$$\int u_m(z)\,\overline{u_n(z)}\,|dz| = \begin{matrix} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{matrix}$$

ont lieu et nous appelons, dans ce cas, la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu\, u_\nu(z)$$

ou

$$c_\nu = \int f(z)\,\overline{u_\nu(z)}|dz|$$

la série de Fourier de $f(z)$.

En tenant compte des propriétés des séries de Fourier et du lemme I nous pouvons établir le théorème suivant.

II. Soit (1) une suite orthogonale et normale. La condition nécessaire et suffisante pour que la série de Fourier pour chaque fonction $f(z)$ de la classe E converge en moyenne vers $f(z)$ sur le cercle $|z| = 1$ et uniformément vers $f(z)$ à l'intérieur de ce cercle, est que la suite (1) soit complète.

Supposons que

(2) $$v_1(z),\ v_2(z)\ldots.\ v_n(z)\ldots.$$

forment une autre suite de fonctions de la classe E. Nous pouvons trouver[1]) une suite $u_1(z),\ u_2(z)\ldots.\ u_n(z)\ldots.$ orthogonale, normale et linéairement équivalente à (2)

$$u_n(z) = \sum_{\nu=1}^{n} A_{n\nu}\, v_\nu(z);\ (u = 1, 2\ldots.).$$

On constate immèdiatement que les deux suites sont complètes ou incomplètes en même temps. Une conséquence de cette correspondance est le lemme suivant.

III. La condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse

[1]) Voir: *E. Schmidt*, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Math. Annalen, Bd. 63, S. 442.

Digitized by Google

approcher à toute fonction $f(z)$ de la classe E par une combinaison linéaire à coefficients constants de fonctions de la suite (2) est que celle-ci soit complète.

Cela vent dire qu'à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_n$, telles qu'on ait

$$\int \left| f(z) - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu v_\nu(z) \right|^2 |dz| < \varepsilon. \tag{3}$$

De (3) il suit qu'on a pour $|z| < r < 1$

$$\left| f(z) - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu v_\nu(z) \right| < \varepsilon_1$$

ε_1 tendant vers zéro en même temps que ε. De cette propriété des suites complètes, on déduit aisément le lemme suivant.

IV. Soient

$$u_1(z), \; u_2(z) \ldots . \; u_n(z) \ldots .$$

et

$$v_1(z), \; v_2(z) \ldots . \; v_n(z) \ldots .$$

deux suites de fonctions de la classe E, dont la première est complète. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit de même de l'autre, est que

$$\lim_{n=\infty} M(m, n) = 0, \; m = 1, 2 \ldots .$$

$M(m, n)$ désigne ici le minimum de

$$\int \left| u_m(z) - \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu v_\nu(z) \right|^2 |dz|$$

où les C_ν sont des constantes variables.

A chaque fonction $f(z)$ de la classe E nous faisons correspondre une autre fonction $\underline{f(z)}$ definie par l'égalité

$$\underline{f(z)} = \frac{1}{z} \overline{f\left(\frac{1}{z}\right)}. \tag{4}$$

Cette transformation a été employée par *M. Carleman*, en étudiant les fonctions quasi-analytiques [1]). Quand $f(z)$ varie dans la classe E, $\underline{f(z)}$ varie dans une classe que nons désignons par $\underline{E}$. Cette classe est caractérisée par les propriétés suivantes

[1]) *T. Carleman*, Les fonctions quasianalytiques. Lecons professés au Collège de France, p. 43.

Digitized by Google

1° $\underline{f(z)}$ est analytique et régulière pour $|z| > 1$.

2° $\underline{f(z)} = 0$ à l'infini.

3° l'integrale

$$\int_{|z|=r} |\underline{f(z)}|^2 |dz|$$

reste bornée pour $r > 1$. Nous appelons les fonctions $f(z)$ et $\underline{f(z)}$ des fonctions correspondantes. Pour $|z| = 1$ on a

$$z = \frac{1}{\overline{z}}$$

et

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \overline{\underline{f(z)}}. \tag{5}$$

Les lemmes concernant la classe E que nous venons de formuler subsistent encore pour la classe $\underline{E}$. On voit aussi que la propriété d'une suite d'être orthogonale ou complète reste inalterée par la transformation (4).

Soient

$$a_1, a_2, \ldots . a_n \ldots . \tag{6}$$

une suite de nombres différents. Supposons en outre $|a_\nu| < 1$ et désignons par $f(z)$ une fonction arbitraire de la classe E. Nous allons maintenant rechercher les conditions pour que $f(z)$ soit déterminé par la connaissance de

$$f(a_1), f(a_2) \ldots . f(a_n) \ldots . \tag{7}$$

En tenant compte de l'integrale de Cauchy, on peut formuler le problème comme suit. Les relations

$$\int \frac{f(z)\,dz}{z - a_\nu} = 0, \quad \nu = 1, 2 \ldots . \tag{8}$$

quand ont-elles pour conséquence

$$f(z) = 0 ?$$

En utilisant la formule (5), nous pouvons écrire les relations (8) sous la forme

$$\int \overline{\underline{f(z)}} \, \frac{|dz|}{z - a_\nu} = 0, \quad \nu = 1, 2 \ldots .$$

d'où l'on conclut que la question posée est équivalente à celle-ci:

Digitized by Google

La suite

$$(9) \qquad \frac{1}{z-a_1}, \frac{1}{z-a_2}\ldots\ldots \frac{1}{z-a_n}\ldots\ldots$$

quand est-elle complète pour la classe E? Nous commençons par former une suite orthogonale $\varphi_n(z)$, $(n = 1, 2\ldots.)$, linéairement équivalente à la suite (9). On trouve

$$(10) \qquad \varphi_n(z) = \frac{(1-\bar{a}_1 z)(1-\bar{a}_2 z)\ldots.(1-\bar{a}_{n-1} z)}{(z-a_1)(z-a_2)\ldots.(z-a_n)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{n\nu}}{z-a_\nu}$$

ou

$$A_{n\nu} = \frac{(1-\bar{a}_1 a_\nu)(1-\bar{a}_2 a_\nu)\ldots.(1-\bar{a}_{n-1} a_\nu)}{(a_\nu-a_1)\ldots.(a_\nu-a_{\nu-1})(a_\nu-a_{\nu+1})\ldots.(a_\nu-a_n)}.$$

Nous considérons aussi les fonctions correspondantes de la classe E:

$$(10^*) \qquad \varphi_n(z) = \frac{(z-a_1)(z-a_2)\ldots.(z-a_{n-1})}{(1-\bar{a}_1 z)(1-\bar{a}_2 z)\ldots.(1-\bar{a}_n z)}, \quad n = 1, 2\ldots.$$

Cela fait, nous démontrerons le lemme suivant.

V. La condition nécessaire et suffisante pour que la suite (9) soit une suite complète pour la classe E, est que

$$\lim_{n=\infty} M(x, n) = 0 \text{ pour } |x| < 1$$

$M(x, n)$ désigne ici le minimum de

$$\int \left| \frac{1}{z-x} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{C_\nu}{z-a_\nu} \right|^2 |dz|.$$

C'est là une conséquence du lemme IV si nous observons que la suite

$$\frac{1}{z-b_\nu}, \quad \nu = 1, 2\ldots., \text{ où } |b_\nu| < 1, \ \lim |b_\nu| = k < 1$$

est une suite complète pour la classe E. En nous servant des fonctions (10) nous trouvons pour le minimum la formule

$$M(x, n) = \frac{2\pi}{1-|x|^2} |\psi_n(x)|^2,$$

où l'on a posé

$$\psi_n(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots.(x-a_n)}{(1-\bar{a}_1 x)(1-\bar{a}_2 x)\ldots.(1-\bar{a}_n x)}.$$

Digitized by Google

Les fonctions $\psi_n(z)$ convergent uniformément pour $|z| < r < 1$ vers une fonction bornée [1] $\psi(z)$

$$\psi(z) = \lim_{n=\infty} \psi_n(z).$$

Pour qu'on ait $\psi(z) = 0$, il suffit [2] que $\psi(0) = 0$, ce qui nous donne les théorèmes que voici.

VI. La condition nécessaire et suffisante pour que la suite (9) soit une suite complète pour la classe $\underline{E}$, est que

$$\lim_{n=\infty} a_1 a_2 \ldots . a_n = 0. \tag{11}$$

VI*. *La condition nécessaire et suffisante pour que toutes les fonctions $f(z)$ de la classe E soient déterminées par leurs valeurs (7), est que la condition (11) soit vérifiée.*

Si cette relation n'a pas lieu, la fonction $\psi(z)$ fournit un exemple d'une fonction bornée non identiquement nulle, ayant les points (6) pour zeros.

Nous finissons par résoudre le problème suivant. *Étant donne une suite (4) satisfaisant à la condition (11) et les valeurs (7) pour une fonction $f(z)$ de la classe E, trouver une formule d'interpolation pour cette fonction.* Nous y arrivons en remarquant le fait que la suite (10*) est une suite complète et orthogonale pour la classe E. D'après le lemme II nous savons que la série de Fourier de $f(z)$,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(z)$$

converge en moyenne vers cette fonction sur le cercle $|z| = 1$ et uniformément vers $f(z)$ dans l'intérieur de ce cercle. On trouve

$$c_n = (1 - |a_n|^2) \cdot \sum_{\nu=1}^{n} A_{n\nu} f(a_\nu)$$

les $A_{n\nu}$ étant les mêmes que dans la formule (10).

[1] Chaque fonction bornée pour $|z| < 1$ appartient évidemment à la classe E.

[2] Voir: *R. Nevanlinna,* Über beschränkte Funktionen die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen. Annales Ac. Fennicæ. Ser. A, T. 13, p. 26.

Digitized by Google

Digitized by Google

PROFESSOR CARL STØRMER

holdt et med lysbilleder forsynet foredrag om nordlysets problem. I korte træk redegjorde foredragsholderen for de omfattende Arbeider der i den sidste menneskealder er blevet udført i Norge for at opklare nordlysets natur, specielt omtalte han den fotografiske høidemaaling og det mathematiske grundlag for theorien for nordlysets oprindelse. For nærmere detaljer henvises til et foredrag som professoren holdt ved Sorbonne den 14. december 1923 og som er trykt i Livre du Cinquantenaire de la Société française de Physique med Titel: Les aurores boréales.

Digitized by Google

Digitized by Google

ZUR TOPOLOGIE DER GESCHLOSSENEN FLÄCHEN

VON

JAKOB NIELSEN

Die in diesem Vortrag besprochenen topologischen Probleme beziehen sich auf geschlossene zweiseitige Flächen vom Geschlechte $p > 1$. Wir charakterisieren die Punkte der Fläche durch eine komplexe Koordinate x in folgender Weise:

Sei E der Einheitskreis der x-Ebene, Φ das Innere von E, B ein reguläres $4p$-seitiges Polygon mit $x = 0$ als Zentrum und dem Polygonwinkel $\frac{\pi}{2p}$, gebildet aus Bögen von auf E senkrechten Kreisen. Die Seiten von B seien fortlaufend numeriert. Mit $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_p$ seien lineare Substitutionen von x bezeichnet, die E in sich transformieren und durch folgende Festsetzung bestimmt sind: a_1 führt die dritte Polygonseite in die erste über, a_2 die siebente in die fünfte u. s. w. Ebenso führt b_1 die zweite Polygonseite in die vierte, b_2 die sechste in die achte u. s. w. über. Und zwar ist jedesmal nicht die Drehung um $x = 0$ gemeint, sondern die andere Substitution, die das Geforderte leistet. Jede der Substitutionen lässt dann zwei Punkte auf E invariant; für a_1 z. B. sind das die beiden Punkte, in denen der zur ersten und dritten Polygonseite und E senkrechte Kreis K auf E trifft. Im Sinne einer auf E als unendlich fernes Gebilde gegründeten hyperbolischen Metrik, bei der Φ das konforme Abbild der hyperbolischen Ebene ist, ist a_1 also eine »Verschiebung« mit der »Geraden« K als »Schiebungsachse«.

Die a_i, b_i sind erzeugende Operationen einer unendlichen Gruppe F. Sie genügen dabei der Beziehung

$$a_1\, b_1\, a_1^{-1}\, b_1^{-1}\, a_2\, b_2\, a_2^{-1}\, b_2^{-1} \ldots\, a_p\, b_p\, a_p^{-1}\, b_p^{-1}(x) = x$$

als einziger unabhängiger Relation. Die Bilder von B bei allen Operationen von F bilden ein unendliches nichteuklidisch-

Digitized by Google

reguläres Netz, dessen Maschen sich gegen E häufen. Punkte von Φ, die sich bei einer Operation aus F entsprechen, sollen äquivalent heissen. Die Gesamtheit der Systeme äquivalenter Punkte bildet eine geschlossene zweidimensionale Mannigfaltigkeit φ vom Geschlecht p, eine »geschlossene Fläche«. Diese hat Φ als universelle Überlagerungsfläche und F als Fundamentalgruppe. — Man kann diese geschlossene Fläche φ in abstracto auffassen oder auch an die Einführung einer komplexen Koordinate auf einer im Raum gelegenen geschlossenen Fläche φ vom Geschlecht p denken, indem man diese nach Anbringung eines kanonischen Schnittsystems mit einem gemeinsamen Punkt zu dem Polygon B in eine bis auf den Rand eineindeutige und stetige Beziehung setzt.

Einem stetigen Kurvenstück

$$x = k(t),\ 0 \leqq t \leqq 1,\ |k(t)| < 1,$$

in Φ entspricht ein stetiges Kurvenstück auf φ; demselben Kurvenstück auf φ entspricht jedes mit dem ersteren äquivalente Kurvenstück in Φ. Sind die Endpunkte in Φ äquivalent, z. B.

$$k(1) = f(k(0)),\quad f \text{ ein Element von } F,$$

so wird eine geschlossene Kurve auf φ dargestellt. Dieser Kurve ist also das Element f, oder mit demselben Recht jedes aus f durch Transformation innerhalb F hervorgehende Element, also eine ganze »Elementklasse«, zugeordnet. Zwei geschlossene Kurven sind homotop, d. h. auf φ in einander deformierbar, wenn sie zu derselben Elementklasse von F gehören *(Poincaré)*. Das Homotopieproblem führt also auf das gruppentheoretische Problem, zu entscheiden, ob zwei Elemente von F ineinander transformierbar sind. Dieses Problem ist rein kombinatorisch gelöst *(Dehn)*.

Ist es möglich, auch offene, unendliche Kurven auf der Fläche ihrem topologischen Verlauf nach in ähnlicher Weise mittels der Fundamentalgruppe zu charakterisieren? Um eine Antwort hierauf zu finden, wollen wir als Zwischenglied ein Normalbild einer Kurve betrachten, das in den Untersuchungen von *Poincaré* und *Dehn* eine wesentliche Rolle spielt.

Digitized by Google

Jedes Element von F hat zwei getrennte Fixpunkte auf E. Der zu E senkrechte Kreisbogen in Φ, der sie verbindet, heisse die »Achse« des Elements. Die abzählbare Menge der Achsenendpunkte erfüllt E überall dicht. Jeder Achsenendpunkt gehört nur einer bestimmten Achse und damit einer unendlichen zyklischen Untergruppe von F an. Nun ist jeder zu E senkrechte Kreis Bild einer geodätischen Linie in der mit hyperbolischer Metrik ausgestatteten geschlossenen Mannigfaltigkeit φ. Die Achsen der F-Elemente, und nur diese, sind Bilder geschlossener geodätischer Linien, indem die Grundpotenz der zu einer Achse gehörigen unendlichen zyklischen Untergruppe auf der Achse ein »Verschiebungsstück« bestimmt, das einer einmaligen Durchlaufung der geschlossenen geodätischen Linie auf φ entspricht. Ein auf E senkrechter Kreisbogen, der in einem Achsenendpunkt endigt, ohne selbst Achse zu sein, stellt auf φ eine geodätische Linie dar, die asymptotisch gegen eine geschlossene geodätische Linie verläuft. Wie ist der Verlauf einer geodätischen Linie auf φ zu charakterisieren, wenn ihr Bild in Φ gegen einen Punkt von E strebt, der nicht Achsenendpunkt ist? Hier erweist sich, wie zu erwarten ist, eine Bestimmung der Lage der einzelnen Punkte auf E mittels der Gruppe F erforderlich, die wie folgt vorgenommen werden kann:

Man teile E in $4p$ gleich grosse Segmente, die der Reihe nach mit A_1, B_1^{-1}, A_1^{-1}, B_1, A_2, B_2^{-1}, A_2^{-1}, $B_2, \ldots, B_p$ bezeichnet werden, und zwar so, dass die Mittelpunkte von A_1, $B_1^{-1}, \ldots$ beziehungsweise mit den Punkten $a_1(0)$, $b_1^{-1}(0), \ldots$ auf demselben Radius liegen. Nun sei Q ein beliebiger Punkt von E. Er liege etwa in A_1. Dann sucht man $a_1^{-1}(Q)$ auf. Fällt dieser Punkt z. B. in B_2, so sucht man $b_2^{-1}\, a_1^{-1}(Q)$ auf. Fällt dieser etwa in B_1^{-1}, so fährt man mit $b_1\, b_2^{-1}\, a_1^{-1}(Q)$ fort u. s. w. So bestimmt Q eindeutig eine unendliche Erzeugendenfolge:

$$a_1\ b_2\ b_1^{-1} \ldots\ldots$$

(Für die abzählbar vielen Punkte, die bei diesem Prozess einmal in einen der benutzten Teilungspunkte auf E fallen, kann man, wenn man will, das Verfahren leicht durch besondere Verabredungen eindeutig machen). Die Bedeutung dieser »Entwickelung des Randpunktes Q nach der Gruppe F« beruht darauf, dass für jedes $|x| < 1$ die Folge

Digitized by Google

$$a_1(x),\ a_1 b_2(x),\ a_1 b_2 b_1^{-1}(x), \ldots .$$

gegen Q konvergiert.

Diese Entwickelung nach F wird für alle Achsenendpunkte, und nur für diese, periodisch. Die Periode entspricht der zu der Achse gehörigen Grundpotenz. So wie hiermit die geschlossenen und die gegen solche asymptotisch verlaufenden geodätischen Linien auf φ durch die Gruppenentwickelung ihres »Unendlichkeitspunktes« charakterisiert sind, gilt das Gleiche auch im allgemeinen Fall. Hieraus fliessen zunächst metrische Resultate, von denen ich die beiden folgenden anführe: [1])

1 0. Es gibt offene geodätische Linien auf φ, die jedem Punkt von φ beliebig nahe kommen. Dabei liegen überdies noch die Richtungen der geodätischen Normalen beliebig kleiner Länge vom Punkte auf die Linie überall dicht um den Punkt. Dieser Fall tritt ein, wenn in der F-Entwickelung des Randpunktes allen Elementen von F entsprechende Ausschnitte vorkommen.

2 0. Zu jeder vorgegebenen Länge ε gibt es geschlossene geodätische Linien auf φ, die jedem Punkte von φ näher als bis auf den Abstand ε kommen.

Der Begriff des durch eine F-Entwickelung bestimmten »Unendlichkeitspunktes« einer gerichteten Kurve hat topologische Bedeutung für eine ausgedehnte Klasse von Kurven:

Unter einer »offenen Halbkurve« verstehen wir eine durch eine stetige Funktion

$$x = k(t),\ 0 \leqq t < \infty,\ |k(t)| < 1,$$

dargestellte Kurve. Zwei offene Halbkurven wird man auf φ homotop nennen, wenn man Darstellungen $x = k(t)$ und $x = l(t)$ für sie so wählen kann, dass der nichteuklidische Abstand zwischen zwei zum selben t-Wert gehörigen Punkten auf Φ beschränkt bleibt, da man alsdann, wie unmittelbar ersichtlich, einen stetigen Übergang von der einen zur anderen mittels einer einparametrigen Schar von offenen Halbkurven bewerkstelligen kann. Das wird zunächst immer dann eintreten, wenn die Bilder der beiden Kurven ganz innerhalb eines Kreises um den Nullpunkt mit einem Radius < 1 verlaufen. Wir denken

[1]) Elementargeometrische Beweise dieser Sätze ohne Benutzung der Randpunktentwickelung findet man in meinem Aufsatz in der Juel-Festschrift, Mat. Tidsskrift B, 1925.

Digitized by Google

daher im Folgenden an solche Halbkurven, deren Bilder in Φ Grenzpunkte auf E haben, speziell an eine Halbkurve K, deren Bild $x = k(t)$ nur einen Grenzpunkt Q auf E hat, so dass dabei $k(t) \to Q$ für $t \to \infty$ und $k(t)$ ganz innerhalb eines Kreisbogenzweiecks mit Spitzen auf E (die eine in Q) verläuft. Eine solche Halbkurve K nennen wir »richtungsbestimmt« auf φ und Q ihren »Richtungspunkt« für die gewählte Darstellung. (Wählt man $x = f(k(t))$ anstatt $x = k(t)$ als Darstellung für K, so wird Q durch $f(Q)$ ersetzt). Da die Seiten des Kreiszweiecks nichteuklidische Abstandslinien sind, ist eine solche Halbkurve homotop mit ihrer nichteuklidischen Projektion auf irgend eine in Q endigende geodätische Linie. Notwendige und hinreichende Bedingung für die Homotopie zweier richtungsbestimmter Halbkurven ist daher zunächst die Äquivalenz ihrer Richtungspunkte und danach die Homotopie ihrer Projektionen auf irgend eine geodätische Linie »gleicher Richtung« (ein eindimensionales Problem). Hier hat uns nur die erste Bedingung zu beschäftigen, und die Antwort ist diese: Zwei Randpunkte sind dann und nur dann äquivalent vermittelst F, wenn ihre F-Entwickelungen gleich endigen, d. h. bis auf endliche Anfangsabschnitte (nicht notwendig gleicher Länge) übereinstimmen.

In dieser Form umfasst die Homotopiebedingung auch die auf φ geschlossenen Kurven, und in diesem speziellen Fall ist die erste Bedingung allein wegen des periodischen Verlaufes der Bilder in Φ ausreichend. *Dehns* kombinatorische Lösung des Transformationsproblems spielt dabei dadurch hinein, dass alle F-Entwickelungen »reduzierte« Erzeugendenausdrücke im *Dehn*schen Sinne sind[1]).

Man dehnt diese Betrachtungen leicht auf nach beiden Seiten offene und richtungsbestimmte Kurven aus.

Wir wollen nun topologische Abbildungen der Fläche φ auf sich betrachten. Solche werden dargestellt durch Abbildungsfunktionen $y = g(x)$, welche Φ topologisch auf sich abbilden und dabei in äquivalenten Punkten äquivalente Werte haben. Dies Letztere spricht sich dadurch aus, dass eine solche Abbil-

[1]) M. Dehn, Transformation der Kurven auf zweiseitigen Flächen. Math. Annalen 72 (1912).

Digitized by Google

dungsfunktion $g(x)$ unendlich vielen Funktionalgleichungen der Form

$$g(f(x)) = f'(g(x))$$

genügt, wo f und f' Elemente von F sind, deren Zuordnung zu einander, wenn f die Gruppe F durchläuft, einen Isomorphismus von F mit sich selbst konstituiert. Die durch $g(x)$ dargestellte Abbildung von φ auf sich wird auch durch jede »mit g konjugierte« Abbildungsfunktion $g_1(x) = f_1(g(x))$ dargestellt, wo f_1 irgend ein Element aus F ist. g_1 »induziert« dabei den Isomorphismus

$$f \to f_1 f' f_1^{-1},$$

den wir mit dem ersteren zur selben »Klasse« rechnen. Jede Abbildung von φ auf sich gehört so mit einer bestimmten Isomorphismenklasse von F zusammen. Zwei Abbildungen, die in diesem Sinn zur selben Klasse gehören, sind in einander deformierbar, wie neuerdings *R. Baer* bewiesen hat.

Es ist nun von entscheidender Bedeutung für die hier behandelten Fragen, dass die durch eine Abbildungsfunktion bewirkte topologische Abbildung von Φ auf sich (wobei die obigen Funktionalgleichungen gültig sind) auf den Rand E erweitert werden kann.[1]) Die topologische Abbildung von E auf sich, die sich so stetig an die gegebene von Φ anschliesst, hängt dabei nur von dem induzierten Isomorphismus ab, ist also ein Charakteristikum der Klasse von Flächenabbildungen. Diese Abbildung von E ist dadurch bestimmbar, dass die Achsenendpunkte des Elements f in diejenigen von f' übergehen, wodurch die zyklische Anordnung der Achsenendpunkte auf E nicht geändert wird.

Wir benutzen im Folgenden von den Abbildungsfunktionen nur die Stetigkeit und die Gültigkeit der Funktionalgleichungen, nicht aber die eindeutige Umkehrbarkeit der topologischen Abbildungen. Das Folgende gilt also für beliebige stetige Abbildungen, wenn nur die zugehörigen Abbildungsfunktionen den Funktionalgleichungen genügen. Auch in diesem allgemeineren Fall ist nämlich die Erweiterung auf den Rand möglich, und die Randabbildung ist dieselbe, allein durch den Isomorphismus bestimmte wie im topologischen Spezialfall. Man sieht das un-

[1]) Siehe des Vf. Aufsatz in den »Abhandl. aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Univ.« III, 1924.

Digitized by Google

mittelbar im einfachsten Fall, wo $g(x)$ den identischen Isomorphismus induziert:

$$g(f(x)) = f(g(x)), \tag{1}$$

wo also g mit allen Elementen von F vertauschbar ist. Bildet man nämlich die Funktion

$$\frac{|x - g(x)|^2}{(1 - |x|^2)(1 - |g(x)|^2)},$$

so bestätigt man leicht, dass sie sich bei gleichzeitiger linearer Transformation von x und $g(x)$ nicht ändert; sie hat also wegen (1) in äquivalenten Punkten den gleichen Wert; und da ihr Wert in einem Fundamentalbereich von F beschränkt ist, ist er in ganz Φ beschränkt. Daraus folgt $g(x) \to x$ für $|x| \to 1$. Die stetige Abbildung $g\Phi$ wird also durch die identische Abbildung von E abgeschlossen.

Wir fragen jetzt bei einer gegebenen stetigen Abbildung von φ auf sich selbst nach Punkten, die mit ihrem Bildpunkt zusammenfallen. Dieses »Fixpunkteproblem« hat in neuerer Zeit in der Mechanik bei der Bestimmung periodischer Bewegungen in einem dynamischen System mit 2 Freiheitsgraden eine Rolle gespielt. Wir wollen die Annahme machen, dass unter den Gebieten, die auf φ bei Fortnahme der Fixpunktmenge übrigbleiben, eines das ursprüngliche Geschlecht p hat. Es heisse ω und das Teilgebiet von Φ, das die entsprechenden Koordinatenwerte enthält, Ω.

Nun sei x ein Punkt von Ω, $y = g(x)$ der (von x verschiedene) Bildpunkt. Wir legen einen zu E senkrechten Kreis durch x und y. Durchläuft man diesen in der Richtung von x nach y, so sei $z = z(x)$ der Punkt, in dem man auf E stösst, also

$$z(x) = \frac{x\bar{y} - \bar{x}y + |(x - y)(1 - x\bar{y})|}{\bar{x}y(x - y) - (\bar{x} - \bar{y})}.$$

Diese Funktion ist, wie unmittelbar ersichtlich, auf solche Teile des Randes E fortsetzbar, wo $y \neq x$, und in solchen Randpunkten wird $z = y$. Wir wollen daher die fixpunktefreien Intervalle auf E mit zur Punktmenge Ω rechnen. Man kann sagen, dass wir es hier mit einer »Arcusvariation« zu tun haben, insofern wir die Richtung von Punkt zu Bildpunkt durch einen Punkt des unendlichfernen Kegelschnitts repräsentieren. Bei simultaner

Digitized by Google

nichteuklidischer Bewegung von Punkt und Bildpunkt nimmt der »Richtungspunkt« an der Bewegung Teil. Beschreibt x einen geschlossenen Weg in Ω, so beschreibt z einen geschlossenen Weg auf E. Ist der erstere in Ω zusammenziehbar, so ist der letztere auf E zusammenziehbar. Lässt sich der letztere stetig in eine von Null verschiedene Anzahl von Umläufen um E überführen, so hat der erstere Fixpunkte der Abbildung $g\Phi$ umschlossen. Wir messen daher die Variation von $z(x)$ mittels der in ganz Ω definierten reellen Funktion

$$\xi(x) = \frac{1}{2\pi i} \log z(x).$$

Jedem stetigen Weg in Ω wird das $\int d\xi$ längs des Weges und jedem geschlossenen gerichteten Weg in Ω also eine ganze Zahl, der »Index« des geschlossenen Weges, zugeordnet. Zur Bestimmung von Fixpunkten für $g\Phi$ gilt es also, geschlossene Wege mit einem von Null verschiedenen Index zu finden. Da nun die Gültigkeit der Funktionalgleichungen das Einzige ist, was man ausser der Stetigkeit von der Abbildung $g\Phi$ weiss, ist man darauf angewiesen, eine Bestimmung von $\int d\xi$ durch gleichzeitige Betrachtung äquivalenter Wegstücke zu ermöglichen. Man sieht aber sofort aus den Funktionalgleichungen, dass dabei als äquivalenzvermittelnde Funktionen nur solche Elemente von F in Betracht kommen, die mit g vertauschbar sind. Aus der obigen Bemerkung über simultane Bewegung von Punkt und Bildpunkt folgert man:

Ist f ein Element aus F, das die Gleichung (1) erfüllt, und bildet man die ebenfalls in ganz Ω definierte Funktion

$$\delta_f(x) = \xi(f(x)) - \xi(x),$$

so ist $\int d\delta_f$ unabhängig vom Integrationsweg in Ω. Der Index eines geschlossenen Weges lässt sich auf Integrale dieser Art zurückführen, wenn der Weg aus Stücken zusammengesetzt ist, die paarweise mittels solcher mit g vertauschbaren Gruppenelemente äquivalent sind. Wir wählen als solchen Weg daher den Rand eines Fundamentalbereichs für die Untergruppe der beim Isomorphismus ungeänderten Elemente.

Die analoge Bestimmung ist dann für die mit $g(x)$ konjugierten Abbildungsfunktionen, d. h. für die anderen Isomorphis-

Digitized by Google

men der Isomorphismenklasse auszuführen. Hierbei ist aber Folgendes zu beachten[1]):

Es sei hg eine zu g konjugierte Funktion (also h ein Element aus F). Diese habe in x_1 einen Fixpunkt:

$$hg\,x_1 = x_1\,.$$

Dann ist für beliebiges f aus F:

$$gf\,x_1 = f'g\,x_1 = f'h^{-1}\,x_1 = f'h^{-1}f^{-1}\cdot fx_1\,,$$

also hat die zu g konjugierte Funktion $fhf'^{-1}g$ eine Fixpunktmenge, die aus derjenigen von hg durch f hervorgeht. Wir nennen die Gruppenelemente h und fhf'^{-1} und ebenso die durch sie hervorgerufenen zu g konjugierten Funktionen »isogredient« mit Bezug auf den gegebenen Isomorphismus. Für festes h und variables f erhalten wir eine Isogredienzklasse, der wir somit eine »Fixpunktklasse« der gegebenen Abbildung von φ zuordnen können. Nun gilt: Jede Abbildung von φ hat nur endlich viele Fixpunktklassen, d. h. die oben formal bestimmten Fixpunktklassen sind bis auf endlich viele leer.[2])

Damit ist folgender Weg zur Lösung des allgemeinen Fixpunktproblems vorgezeichnet:

> *Gegeben ist eine stetige Abbildung von φ auf sich, etwa durch Angabe einer Abbildungsfunktion $g(x)$. I: $(f \to f')$ sei der durch g induzierte Isomorphismus von F, U die Untergruppe von F, deren Elemente bei I ungeändert bleiben. Der Index des Randes eines Fundamentalbereichs von U ist eine allein von I abhängige ganze Zahl, die den Beitrag einer Fixpunktklasse zur Indexsumme misst. Man wiederhole das Verfahren für die anderen Isomorphismen $I_{\langle h^{-1}\rangle}$: $(f \to hf'h^{-1})$ der Isomorphismenklasse von I, wo h je einen Repräsentanten aller Isogredienzklassen bezüglich I durchläuft. Dabei führen nur endlich viele h auf einen von Null verschiedenen Beitrag zur Indexsumme (topologisch notwendige Fixpunktklassen).*

Ich bespreche kurz einige einfache Beispiele:

Beispiel 1: Die Deformationen. Hier gibt es unter den konjugierten Abbildungsfunktionen eine, $g(x)$, die den identischen

[1]) Ich unterdrücke im Folgenden die Klammern um die Funktionsargumente.

[2]) Den Beweis siehe in der auf Seite 268 zitierten Arbeit.

Digitized by Google

Isomorphismus induziert. Die stetige Abbildung $g(\Phi + E)$ ist also auf dem Rande die Identität. E besteht ganz aus Fixpunkten.

Hier ist die Untergruppe U mit F identisch. Bringt man in ω ein kanonisches Schnittsystem an, so überträgt es sich auf Ω als Rand eines Fundamentalbereiches von F mit Seiten, die paarweise mittels eines Fixelements äquivalent sind. Das obige Verfahren der Zurückführung auf Integrale der Form $\int d\,\delta_f$, die durch einfache Kreisbögen auf E gemessen werden, liefert vermittels einer einfachen Abzählung den Index $2 - 2p$.

Die konjugierten Abbildungsfunktionen hg induzieren Isomorphismen $I_{\langle h^{-1}\rangle} : (f \to hfh^{-1})$. U ist dabei die zu der Achse von h gehörige unendliche zyklische Untergruppe von F, und die Endpunkte dieser Achse sind die einzigen Fixpunkte auf E. Ein Fundamentalbereich für U wird also abgegrenzt durch einen beliebigen Querschnitt von E zu E in Ω, der die beiden Fixpunkte trennt, und sein Bild bei der Grundpotenz von U, und der Index bestimmt sich sofort zu Null. (Das gilt allgemein immer dann, wenn E bis auf die Endpunkte einer Achse von Fixpunkten frei ist). Wir haben also:

Bei den Deformationen einer Fläche vom Geschlecht p ist die Indexsumme über alle Fixpunktklassen $2 - 2p$. Für $p \neq 1$ gibt es also immer Fixpunkte. Für $p > 1$ rührt die Indexsumme vom Beitrag einer Fixpunktklasse her, und eventuelle andere Fixpunktklassen (die in endlicher Zahl auftreten können) haben den Index Null. Diese letzteren lassen sich zum Verschwinden bringen, und die eine topologisch notwendige Klasse lässt sich, wie man leicht sieht, durch einen einzigen Punkt repräsentieren.

Dies ist der topologische Teil der in der *Birkhoff*schen Stabilitätsformel enthaltenen Aussage. Dieser topologische Satz ergibt sich auf diesem Wege, ohne dass man einschränkende Voraussetzungen irgendwelcher Art einzuführen braucht ausser der obigen Voraussetzung der Existenz eines fixpunktefreien Gebietes ω vom Geschlecht p auf φ. Und diese Voraussetzung ist natürlich und notwendig. Wenn nämlich durch die Fortnahme der Fixpunktmenge von φ der topologische Charakter der Fläche vollkommen zerstört wird, — im extremen Fall kann ja die Abbildung die Identität als Spezialfall einer Deformation sein, — so entfällt damit natürlich die Möglichkeit, die Rolle, die die einzelnen Fixpunkteklassen spielen, durch Indizes zu messen.

Beispiel 2: Das Gegenstück des identischen Isomorphis-

Digitized by Google

mus ist der Isomorphismus ohne von der Identität verschiedene Fixelemente, z. B. Isomorphismen endlicher Ordnung. Wir nehmen als Beispiel:

$$I : \begin{pmatrix} a_i \to a_{i+1} \\ b_i \to b_{i+1} \end{pmatrix}, \ (i \bmod p).$$

Hier ist $I^p = 1$. Dieser Isomorphismus wird z. B. durch eine Drehung um den Nullpunkt durch den Winkel $\frac{2\pi}{p}$ induziert. Aus der Periodizität von I folgt, dass E fixpunktefrei, also I fixelementefrei ist. Hier ist U also die Identität und Φ der Fundamentalbereich von U. Wir haben somit den Index von E selbst zu bilden (E gehört ja hier ganz zu Ω), und dieser ergibt sich bei positivem Umlauf zu 1. (Dies ist mit anderen Worten einfach eine Anwendung des bekannten *Brouwer*schen Satzes). Wir betrachten dann weiter die anderen Isomorphismen der Klasse von I:

$$I_{\langle h^{-1} \rangle} : \begin{pmatrix} a_i \to h a_{i+1} h^{-1} \\ b_i \to h b_{i+1} h^{-1} \end{pmatrix}, \ (i \bmod p).$$

$I_{\langle h^{-1} \rangle}$ hat das Fixelement

$$k = h \cdot I(h) \cdot I^2(h) \ldots\ldots I^{p-1}(h),$$

wo $I(h)$, $I^2(h)$, u. s. w. die Elemente bedeuten, in die h bei I, I^2, u. s. w. übergeht. Hier wissen wir nun, dass die Randabbildung hgE als Superposition zweier linearen Transformationen (g ist nämlich auf E einfach eine p-tel Drehung) höchstens zwei Fixpunkte auf E hat. Ist also $k \neq 1$, so ist die zur Achse von k gehörige unendliche zyklische Untergruppe von F die gesuchte Gruppe U, und analog wie im Beispiel 1 führen alle solche h auf die Indexsumme Null. Es bleiben also nur solche h noch zu untersuchen, für die $k = 1$ ist, also Lösungen der Isomorphiegleichung

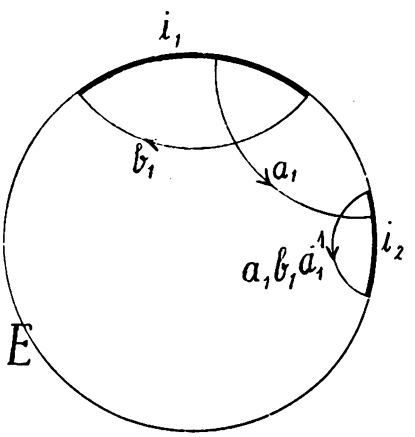
$$h \cdot I(h) \cdot I^2(h) \ldots\ldots I^{p-1}(h) = 1.$$

Nun zeigt eine einfache gruppentheoretische Analyse, dass die Lösungen dieser Isomorphiegleichung entweder die Form $l\, l'^{-1}$ oder die Form $l \cdot a_1\, b_1\, a_1^{-1}\, b_1^{-1} \cdot l'^{-1}$ haben, wo l ein willkürliches Element aus F ist und $l' = I(l)$. In beiden Fällen ist, wie durch Ausrechnung folgt, $(I_{\langle h^{-1} \rangle})^p = 1$, sodass der Index 1

Digitized by Google

wird, ebenso wie für I selbst. Die erste dieser beiden Fixpunktklassen ist aber die schon bestimmte, indem $h = 1$ in der Form $l\,l'^{-1}$ enthalten ist, nämlich für $l = 1$. Es kommt also nur eine Fixpunktklasse entsprechend der zweiten Lösungsform hinzu. Alle aus der p-tel Drehung durch Deformation hervorgehenden Abbildungen haben also zwei topologisch notwendige Fixpunktklassen, jede vom Index 1.

Beispiel 3: Ich bespreche noch ein etwas allgemeineres Beispiel, bei dem die Konstruktion eines Fundamentalbereichs für U etwas eingehendere Untersuchungen erforderlich macht. $g(x)$ sei eine Abbildungsfunktion, die den Isomorphismus $I: (a_1 \to a_1\, b_1)$ induziert. (Die übrigen $2p-1$ Erzeugenden sollen in sich selbst übergehen). Hier ist U die freie Gruppe mit den $2p-1$ Erzeugenden $b_1, a_2, b_2, \ldots, a_p, b_p$. Um einen Fundamentalbereich für U abzugrenzen, müssen wir notwendig Stücke von E zur Hülfe nehmen, aber solche Stücke müssen, um brauchbar zu sein, zu Ω gehören, d. h. fixpunktefrei sein. Wir müssen also die Struktur der Abbildung gE näher untersuchen. Dazu betrachten wir die Achsen der Elemente a_1, b_1 und $a_1\, b_1\, a_1^{-1}$. Diese liegen zu einander so wie in der Figur angegeben. (Die Figur entspricht dem Fall $p = 2$).



Nun ist

$$I(a_1) = a_1\, b_1$$
$$I^n(a_1) = a_1\, b_1^n.$$

Für $n \to \infty$ und $n \to -\infty$ konvergiert der eine Endpunkt der Achse von $a_1\, b_1^n$ gegen die Endpunkte der Achse von b_1, der andere gegen die Endpunkte der Achse von $a_1\, b_1\, a_1^{-1}$. Diese beiden Achsen begrenzen also fixpunktfreie Intervalle i_1 und i_2 auf E. Ihre Endpunkte sind Fixpunkte auf E, die diese Intervalle begrenzen. Die Funktionalgleichungen zeigen nun, dass bei Ausübung aller Elemente aus U die Intervalle i_1 und i_2 wieder in fixpunktfreie Intervalle übergehen, begrenzt von Fixpunkten, nämlich den Achsenendpunkten derjenigen Elemente, in die b_1 und $a_1\, b_1\, a_1^{-1}$ durch

Digitized by Google

Transformation mit eben jenen Elementen aus U übergehen. Diese Intervallmenge liegt überall dicht auf E. Zwei verschiedene Intervalle können dabei keinen Endpunkt gemeinsam haben, sodass es keine isolierten Fixpunkte auf E gibt. Die Fixpunktmenge auf E, bestehend aus 1) den abzählbar vielen Intervallendpunkten und 2) den Häufungspunkten für diese, ist also eine nirgends dichte perfekte Menge.

Wir betrachten die fixpunktfreien Intervalle etwas näher. Jedes derselben wird bei g topologisch auf sich abgebildet, so dass dabei alle Punkte in der gleichen Richtung verschoben werden. Nun sind bekanntlich topologische fixpunktfreie Abbildungen zweier offener Intervalle immer ähnlich. Hier gilt aber insbesondere, dass die Abbildung in einem beliebigen dieser Intervalle aus der Abbildung gi_1 oder gi_2 durch Transformation mit einem F-Element hervorgeht. Und für die Abbildungen gi_1 und gi_2 selbst gilt, dass sie aus einander durch Transformation mit einer (einem bestimmten Isomorphismus entsprechenden) Abbildungsfunktion hervorgehen. Hierdurch ergibt sich: Bildet man die Gesamtheit der Transformierten von b_1 mit den Elementen von F, so lässt sich die Abbildung gE in jedem Punkt von E durch Superposition einer endlichen oder unendlichen Folge aus dieser Gesamtheit darstellen. Die zu benutzende Folge variiert dabei von Punkt zu Punkt.

Nachdem man so einen Einblick in die Struktur der Abbildung gE bei dem gegebenen Isomorphismus erhalten hat, gelingt es leicht, einen Fundamentalbereich für U unter Zuhülfenahme zweier fixpunktefreier Randstücke herzustellen und den zugehörigen Index durch eine reine Abzählung zu ermitteln. Das Resultat ist auch in diesem Fall $2 - 2p$, und ebenso wie im ersten Beispiel liefern auch hier die konjugierten Abbildungsfunktionen keinen neuen Beitrag zur Indexsumme, was ich an dieser Stelle nicht näher ausführe.

Zum Schluss will ich es nicht unterlassen, auf den Zusammenhang dieser Untersuchungsrichtung mit der von *I. W. Alexander*[1]) eingeschlagenen hinzuweisen. *Alexander* zielt unter Beschränkung auf topologische Abbildungen und unter Einführung anderer vereinfachender Voraussetzungen von vorneherein auf die ge-

[1]) Transact. of the American Math. Soc. vol 25 (1923).

Digitized by Google

samte Indexsumme. Demgegenüber scheint mir die Aufteilung der Fixpunktmenge in endlich viele Klassen und die Bestimmung des Index jeder Klasse zu einer Vertiefung des Problems zu führen.

Den Reiz dieser Untersuchungen sehe ich neben dem eigentlich topologischen Interesse vor allem darin, dass sie auf natürliche Weise zu interessanten und fruchtbaren gruppentheoretischen Problemstellungen führen.

Digitized by Google

EINE LÖSUNG DES MALFATTISCHEN KONSTRUKTIONSPROBLEMS

VON

ÓLAFUR DANIELSSON

Das Problem lautet: Wenn ein Dreieck ABC gegeben ist, soll man drei Kreise S_A, S_B und S_C so konstruieren, dass S_A die Seiten AB und AC, S_B die Seiten BA und BC und S_C die Seiten CA und CB berührt. Jeder Kreis soll ausserdem die zwei anderen berühren.

Es sei eine kleine Bemerkung vorausgeschickt. Wenn eine Gerade von zwei gleichen Kreisen in den Punkten A und B berührt wird, und wenn ein dritter Kreis, der die Gerade im Punkte P berührt, den ersten Kreis berührt und den zweiten schneidet, lässt sich das Verhältnis der Stücke PA und PB als Funktion des Schnittwinkels der letztgenannten Kreise ausdrücken. Aus Fig. 1 ergibt sich: $\overline{AP}^2 = 4Rr$; $\overline{BP}^2 = 2Rr(1 + \cos v$ und alsdann: $PB : PA = \cos \frac{v}{2}$ (ohne Rücksicht auf das Vorzeichen).

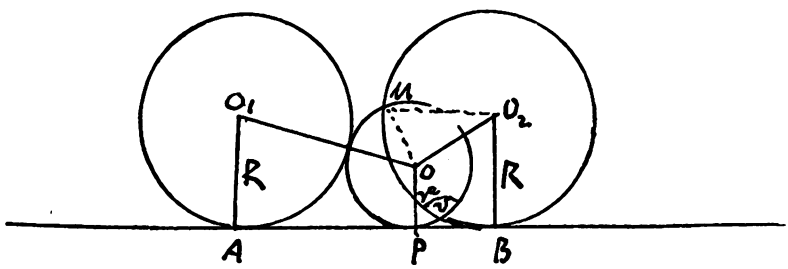


Fig. 1.

Nunmehr wollen wir uns denken, dass das Problem gelöst wäre. Die Kreise S_A und S_B berühren einander in einem Punkte X. Es werde nun die ganze Figur invertiert mit X als Inver-

Digitized by Google

sionszentrum. Die Potenz der Inversion ist ganz willkürlich. Die inverse Figur ist in Fig. 2 abgebildet. Die Kreise S_A und S_B werden in die Parallelen a und b, der Kreis S_C in S und die Geraden BC, CA und AB in die Kreise S_1, S_2 und S_3 invertiert. Die letztgenannten Kreise schneiden sich im Inversionszentrum. Die Winkel des Dreiecks sind den Schnittwinkeln der Kreise S_1, S_2 und S_3 gleich. Es werden dann — der Einleitungsbemerkung gemäss — die Stücke NQ und NL (Fig. 2), und daher auch die Stücke QN und QL in einem bekannten Verhältnisse zueinander stehen, und auch die Stücke PM und PK. Nunmehr sind die Stücke QL und PK einander gleich, und daher

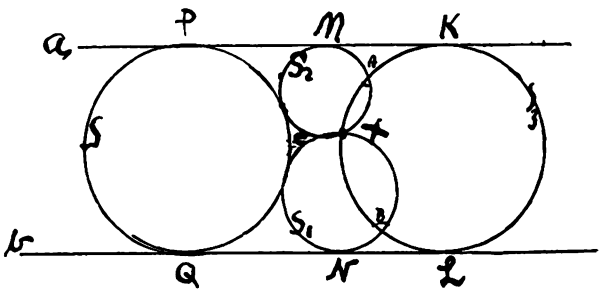


Fig. 2.

wird das Verhältnis der Stücke PM und QN eine bekannte Grösse sein.

Weiter sei der Kreis S_3 aus der Fig. 2 ausgelassen und die Restfigur mit P als Inversionszentrum und $\overline{PQ^2}$ als Inversionspotenz invertiert (Fig. 3). Die Gerade a wird dann in sich selbst, die Gerade b und der Kreis S in einander invertiert. Auch der Kreis S_1 wird in sich selbst invertiert, während S_2 in einen Kreis S_4 übergeht, der die zwei Parallelen in U und V berührt. Der Schnittwinkel der Kreise S_1 und S_4 ist C (gleich dem Schnittwinkel der Kreise S_1 und S_2). Es sind weiter M und U korrespondierende Punkte der letzteren Inversion und daher $PM \cdot PU = PQ^2$. Dieses Produkt kann als bekannt aufgefasst werden, da der Abstand der Parallelen ganz willkürlich ist; weiter ist das Verhältnis $QN : QV = QN \,.\, PU$ bekannt, und hieraus ergibt sich das Produkt $PM \cdot QN$, indem $PM \cdot QN = (PM \cdot PU) \cdot (QN : PU)$. Es war das Verhältnis $PM : QN$ früher bekannt, und daher

Digitized by Google

lassen sich die Stücke PM und QN — und damit die ganze Fig. 2 — konstruieren. Man invertiere nun die Fig. 2, indem man X als Inversionszentrum wählt — die Inversionspotenz ist wiederum ganz willkürlich — und erhält dann ein dem gegebenen ähnliches Dreieck mit seinen Malfattischen Kreisen.

Statt des Dreiecks kann die ursprüngliche Figur aus drei einander schneidenden Kreisen bestehen. Die inverse Figur ist dann mit Fig. 2 identisch, mit der Ausnahme, dass die Kreise S_1, S_2 und S_3 nicht durch denselben Punkt gehen. Es kann aber keinen Einfluss auf die Konstruktion der Fig. 2 haben, ob die Kreise S_1, S_2 und S_3 durch denselben Punkt gehen oder

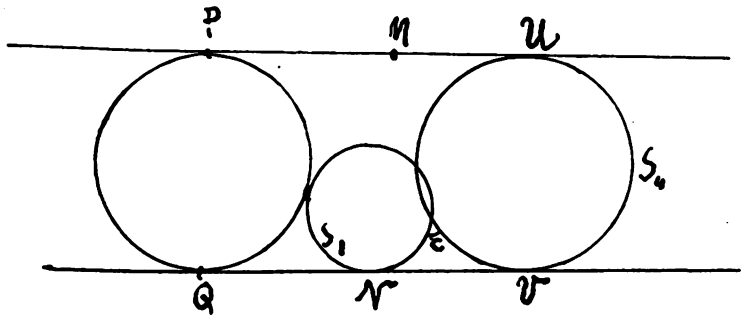


Fig. 3.

nicht, wohl aber auf die Konstruktion der ursprünglichen Figur, indem das Inversionszentrum unbekannt ist. Indessen sollen die Kreise S_1, S_2 und S_3 nach der Inversion in gegebenen Verhältnissen zueinander stehen. Es ist nun leicht zu beweisen, dass der geometrische Ort der Punkte, die so gelegen sind, dass zwei gegebene Kreise nach einer Inversion mit dem Punkte als Inversionszentrum zueinander in gegebenen Verhältnissen stehen, ein Kreis in dem durch die gegebenen Kreise bestimmten Büschel ist. Das Inversionszentrum wird also als Schnittpunkt zweier solcher Kreise konstruiert.

Es ist übrigens nicht notwendig, dass die ursprünglichen Kreise sich schneiden. Die Cosinusse der halben Schnittwinkel werden nämlich nur gebraucht, um Verhältnisse gewisser Linienstücke zu bestimmen, indem sie bei der Inversion unverändert bleiben. Statt des Cosinus des Schnittwinkels kann man

Digitized by Google

aber das Verhältnis $\frac{r_1^2 + r_2^2 - c^2}{2 r_1 r_2}$ setzen (r_1 und r_2 sind die Radien und c die Verbindungslinie der Kreismittelpunkte. Dieses Verhältnis bleibt bei jeder Inversion der Kreise unverändert und kann statt des Cosinus des halben Schnittwinkels zu der Bestimmung der Linienstückverhältnisse dienen. Das Problem kann also auch dann vollständig gelöst werden, wenn die ursprüngliche Figur aus drei ganz willkürlichen Kreisen besteht. (Früher in »Tímarit verkfrædingafjelags Íslands« veröffentlicht).

Digitized by Google

SUR UNE NOTION DE DÉVIATION NON HOLONOME

ET

SON APPLICATION À LA CINÉMATIQUE ET LA DYNAMIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS

PAR

EDGAR B. SCHIELDROP

TABLE DES MATIÈRES.

Remarques préliminaires.

Première Partie: Cinématique.

1. Déplacements dynamiques.
2. La déviation non holonome.
3. L'accélération et l'effet de déviation.
4. Formules de transformations.
5. Quelques théorèmes et lemmes sur la déviation.
6. Systèmes intérieurement holonomes.

Deuxième Partie: Dynamique.

1. L'effet de déviation et les équations du mouvement.
2. Exemple d'un solide roulant sur une arête vive.
3. Le domaine des équations de Lagrange.

Remarques préliminaires.

C'est le problème principal de la dynamique que d'établir les équations du mouvement. Les recherches des derniers trente ans (VIERKANDT,[1]) HADAMARD,[2]) KORTEWEG,[3]) APPELL[4]) et d'autres)

[1]) VIERKANDT, »Ueber gleitende und rollende Bewegung«, *Monatsheft d. Math. und Phys.*, III Jahrg., 1892.

[2]) HADAMARD, »Sur les mouvements de roulement«, *Soc. d. Sc. d. Bordeaux*, 1895.

[3]) KORTEWEG, *Nieuw Archief*, II Reeks, Deel IV, 1899. p. 130.

[4]) APPELL, »Les mouvements de roulement en Dynamique«.

Digitized by Google

ont démontré que les équations de Lagrange ne fournissent point la méthode universellement applicable comme on a été tenté de croire autrefois. Par »les équations de Lagrange« il faut entendre ici celles qu'on obtient en appliquant directement la dite méthode au nombre minimum de paramètres. Car si l'on exprime la force vive par moyen d'un nombre plus élevé de paramètres, en ne tenant compte que des équations de liaisons intégrables, l'emploi des équations lagrangiennes combiné avec la méthode des multiplicateurs par exemple est évidemment toujours admissible. (Dans certains cas exceptionnels, signalés par M. HADAMARD,[1]) des substitutions tirées des équations de liaisons non intégrables peuvent être utilisées).

On doit, on le sait, à M. APPELL une belle méthode générale, basée sur la connaissance de l'énergie d'accélération exprimée par moyen du nombre minimum de paramètres. Or puisque l'écriture des équations de Lagrange n'exige que le calcul de la fonction plus simple qui est l'énergie cinétique, cette méthode sera à préférer à celle de M. Appell dans tous les cas où elle est applicable. La connaissance du domaine d'applicabilité des équations de Lagrange, ainsi que la possession d'un criterium générale et maniable pour décider dans un cas concret si l'on se trouve ou non dans ce domaine, deviennent donc importantes.

Dans le présent travail l'auteur a essayé d'établir une notion cinématique classificatrice (celle de déviation) qui tout en fournissant un criterium suffisant et nécessaire, et qui s'applique dans plusieurs cas d'une manière très simple et intuitive, *étendra en même temps le domaine des équations de Lagrange*, en nous permettant de trouver, par des considérations souvant très simples, les termes supplémentaires qu'il faut ajouter à l'opérateur lagrangien pour rendre les équations exactes.

PREMIÈRE PARTIE. CINEMATIQUE.

1. Déplacements dynamiques. — Étant donné un système à k points matériels dont les coordonnées référées à un trièdre cartesien fixe seront dénotées par (x_1, x_2, x_3); (x_4, x_5, x_6); $\cdots$; $(x_{3k-2}, x_{3k-1}, x_{3k})$.

[1]) HADAMARD, *loc. cit.*

Digitized by Google

Soit

$$\delta x_\alpha = {}_\alpha a_1 \, \delta q_1 + {}_\alpha a_2 \, \delta q_2 + \ldots + {}_\alpha a_n \, \delta q_n$$

ou, en supprimant l'indice α,

$$\delta x = a_1 \, \delta q_1 + a_2 \, \delta q_2 + \ldots + a_n \, \delta q_n \tag{1}$$

le déplacement virtuel le plus général exprimé par moyen du nombre minimum de paramètres. Je me borne aux cas où les a ne dépendent que des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Supposons que les q_i outre du temps t, dépendent d'un paramètre auxiliaire τ, et mettons

$$\delta q_i = \frac{\partial q_i}{\partial \tau} \delta \tau = q_i' \, \delta \tau$$

$$dq_i = \frac{\partial q_i}{\partial t} dt = \dot{q}_i \, dt .$$

Un déplacement virtuel est donné par les équations (1) d'une manière tout à fait formelle dans ce sens que le mouvement qui réalisera ce déplacement n'est pas précisé. On voit que le déplacement virtuel peut être regardé comme la partie principale

$$(a_1 \, q_1' + a_2 \, q_2' + \ldots + a_n \, q_n') \, \delta \tau$$

d'un déplacement réel

$$(a_1 \, q_1' + a_2 \, q_2' + \ldots + a_n \, q_n') \, \delta \tau + b \delta \tau^2 + \ldots ,$$

que subissent les points du système dans un mouvement réalisé physiquement. Or ce mouvement n'est évidemment pas déterminé par sa partie principale. En effet, les mouvements partiels dont il se compose, et qui portent sur les variations indépendantes de n paramètres, peuvent être effectués d'une infinité de maniéres différentes, soit simultanément, soit successivement, soit enfin, d'une manière mixte basée sur une combinaison arbitraire des deux premières. Quand on se place dans le cadre des déplacements virtuels, la manière dont on réalise physiquement les mouvements correspondants, est sans importance, et il devient par conséquent superflu de se préciser dans ce sens. Or le renseignement sur le caractère cinématique d'un système matériel qu'on peut tirer de la connaissance de l'ensemble des déplacements virtuels, renseignement suffisant quand il s'agit des problèmes de la Statique, ne suffit pas, on le sait, quand

Digitized by Google

on aborde le domaine de la Dynamique. Les problèmes de celle-ci exigent des notions plus larges que celle de déplacement virtuel.

Convenons d'appeler »*partie dynamique d'un déplacement*«, ou simplement »*déplacement dynamique*«, la somme des termes du premier et second degré, à savoir

$$a\,\delta\tau + b\,\delta\tau^2$$

ou

$$\alpha\,dt + \beta\,dt^2,$$

selon que τ ou t est l'argument indépendant. Je réserverai le symbole Δ à ces quantités. Quant au nom »déplacement dynamique«, il a été adopté puisque ces déplacements portent sur les accélérations, tandisque les déplacements virtuels ou »statiques«, importants dans la Statique, ne peuvent rendre des services à la Dynamique qu'après qu'on a ramené les problèmes de celle-ci à des problèmes statiques par moyen du principe de d'Alembert.

2. La déviation non holonome. — Faisons maintenant varier le paramètre q_1 seulement. Le déplacement dynamique correspondant sera

$$\underset{q_1}{\Delta} x = \left(a_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial a_1}{\partial q_1}\Delta q_1\right)\Delta q_1.$$

Si à partir de la position $\left(x + \underset{q_1}{\Delta} x\right)$ ainsi obtenue, on fait varier q_2, on obtient

$$\underset{q_1,\,q_2}{\Delta} x = \left(a_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial a_1}{\partial q_1}\Delta q_1\right)\Delta q_1 + \left(a_2 + \frac{\partial a_2}{\partial q_1}\Delta q_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial a_2}{\partial q_2}\Delta q_2\right)\Delta q_2.$$

En continuant ainsi, le déplacement dynamique dû à la variation *successive* des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$ dans l'ordre des nombres naturels, affecte la forme

$$\begin{aligned}(2)\qquad \underset{1,2,\ldots,n}{\Delta} x = {} & \left(a_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial a_1}{\partial q_1}\Delta q_1\right)\Delta q_1 + \left(a_2 + \frac{\partial a_2}{\partial q_1}\Delta q_1\right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\frac{\partial a_2}{\partial q_2}\Delta q_2\right)\Delta q_2 + \ldots + \left(a_n + \frac{\partial a_n}{\partial q_1}\Delta q_1 + \frac{\partial a_n}{\partial q_2}\Delta q_2 + \cdots \right. \\ & \left. + \frac{\partial a_n}{\partial q_{n-1}}\Delta q_{n-1} + \frac{1}{2}\frac{\partial a_n}{\partial q_n}\Delta q_n\right)\Delta q_n,\end{aligned}$$

ce qu'on peut écrire

Digitized by Google

$$(2') \quad \underset{1,2,\ldots,n}{\Delta} x = a_1 \Delta q_1 + a_2 \Delta q_2 + \ldots + a_n \Delta q_n + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial q_1}\Delta q_1 + \frac{\partial a_1}{\partial q_2}\Delta q_2 + \ldots + \frac{\partial a_1}{\partial q_n}\Delta q_n\right)\Delta q_1 + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_n}{\partial q_1}\Delta q_1 + \frac{\partial a_n}{\partial q_2}\Delta q_2 + \ldots + \frac{\partial a_n}{\partial q_n}\Delta q_n\right)\Delta q_n + \frac{1}{2}\underset{1,2,\ldots,n}{S} A^{ik}\,\Delta q_i\,\Delta q_k,$$

où

$$(3) \quad A^{ik} = \frac{\partial a_k}{\partial q_i} - \frac{\partial a_i}{\partial q_k},$$

et où enfin S symbolise une sommation *sans répétition*, de manière qu'on ait

$$(4) \quad \underset{1,2,\ldots,n}{S} A^{ik}\Delta q_i \Delta q_k = A^{11}\Delta q_1\Delta q_1 + A^{12}\Delta q_1\Delta q_2 + \ldots + A^{1n}\Delta q_1\Delta q_n + A^{22}\Delta q_2\Delta q_2 + A^{23}\Delta q_2\Delta q_3 + \ldots + A^{2n}\Delta q_2\Delta q_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + A^{nn}\Delta q_n\Delta q_n .$$

Pour plus de symétrie j'écris les A^{ii}, bien qu'ils soient tous nuls.

Si les variations des paramètres q se succèdent dans un ordre quelconque $\Delta q_{a_1}, \Delta q_{a_2}, \ldots, \Delta q_{a_n}$, on obtient le déplacement dynamique correspondant

$$\underset{a_1, a_2, \ldots, a_n}{\Delta} x ,$$

en observant que dans l'expression (2') le dernier terme seulement change de valeur, de manière qu'on aura

$$\underset{a_1, a_2, \ldots, a_n}{S} A^{ik}\Delta q_i \Delta q_k \quad \text{au lieu de} \quad \underset{1,2,\ldots,n}{S} A^{ik}\Delta q_i \Delta q_k .$$

On voit que d'après (4), la première expression est la somme de tous les termes

$$A^{a_r a_s}\Delta q_{a_r}\Delta q_{a_s} ,$$

dont les indices a_r et a_s se succèdent dans le même ordre que dans la combinaison $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Calculons maintenant le déplacement dynamique dans un mouvement réel. Les variations des paramètres étant simultanées, on a

Digitized by Google

$$\underset{\text{réel}}{\Delta} x = \dot{x}\,dt + \frac{1}{2}\,\ddot{x}\,dt^2 = (a_1\,\dot{q}_1 + a_2\,\dot{q}_2 + \ldots + a_n\,\dot{q}_n)\,dt$$
$$+ \frac{1}{2}\left(a_1\,\ddot{q}_1 + a_2\,\ddot{q}_2 + \ldots + a_n\,\ddot{q}_n + \frac{da_1}{dt}\,\dot{q}_1 + \frac{da_2}{dt}\,\dot{q}_2 + \ldots + \frac{da_n}{dt}\,\dot{q}_n\right)dt^2$$

ou

$$(5)\quad \underset{\text{réel}}{\Delta} x = a_1\left(\dot{q}_1\,dt + \frac{1}{2}\,\ddot{q}_1\,dt^2\right) + a_2\left(\dot{q}_2\,dt + \frac{1}{2}\,\ddot{q}_2\,dt^2\right) + \ldots$$
$$+ a_n\left(\dot{q}_n\,dt + \frac{1}{2}\,\ddot{q}_n\,dt^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial q_1}\,\dot{q}_1\,dt + \frac{\partial a_1}{\partial q_2}\,\dot{q}_2\,dt + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{\partial a_1}{\partial q_n}\,\dot{q}_n\,dt\right)\dot{q}_1\,dt + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial q_1}\,\dot{q}_1\,dt + \frac{\partial q_2}{\partial a_2}\,\dot{q}_2\,dt + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{\partial a_2}{\partial q_n}\,\dot{q}_n\,dt\right)\dot{q}_2\,dt + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_n}{\partial q_1}\,\dot{q}_1\,dt + \frac{\partial a_n}{\partial q_2}\,\dot{q}_2\,dt + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{\partial a_n}{\partial q_n}\,\dot{q}_n\,dt\right)\dot{q}_n\,dt,$$

dont les variations correspondantes des paramètres sont respectivement

$$\dot{q}_i\,dt + \frac{1}{2}\,\ddot{q}_i\,dt^2.$$

Afin de comparer les déplacements dus aux variations simultanées et successives des paramètres, supposons que les variations totales des paramètres soient les mêmes dans les deux déplacements de manière qu'on ait

$$\dot{q}_i\,dt + \frac{1}{2}\,\ddot{q}_i\,dt^2 = \Delta q_i\,.$$

A part des termes du troisième ordre négligeables, on obtient

$$(6)\quad \underset{1,2,..,n}{\Delta} x - \underset{\text{réel}}{\Delta} x = \frac{1}{2}\sum_{1,2,..,n} A^{ik}\,\Delta q_i\,\Delta q_k\,.$$

Pour que les deux déplacements se confondent, quelles que soient les variations Δq_i, il faut et il suffit que les

$$(7)\quad A^{ik} \equiv \frac{\partial a_k}{\partial\, q_i} - \frac{\partial\, a_i}{\partial q_k} = 0\,.$$

Cela revient à dire que les équations (1) sont intégrables, c'est-à-dire, que le système matériel est holonome. Le criterium cinématique suffisant et nécessaire pour qu'un système soit

Digitized by Google

holonome, c'est donc que les déplacements dynamiques sont complètement déterminés par les valeurs algébriques des variations Δq_i des paramètres. On peut donc réaliser un tel déplacement, soit par une variation simultanée, soit par une variation successive de ces paramètres. La différence entre un tel déplacement et le déplacement virtuel aux mêmes variations paramètriques, sera donc toujours la même, et on a

$$\Delta x - \delta x = \frac{1}{2} \ddot{x}\, dt^2,$$

ou $\ddot{x}$ est l'accélération dans le mouvement réel qui réalise simultanément les variations Δq_i pendant le temps dt.

En cas que les conditions (7) ne soient pas remplies ou, ce qui revient au même, si le système matériel n'est pas holonome, on ne peut plus caractériser complètement un changement de position (Δx) par l'ensemble de valeurs (Δq). Au dernier ensemble corresponde, en effet, une infinité de déplacements dynamiques. *Au point de vue cinématique, voilà la différence fondamentale entre les systèmes holonomes et les systèmes non holonomes.* Il est le but du présent travail que de la faire la base d'une théorie cinématique et dynamique des systèmes matériels.

Revenons à la différence

$$\underset{1,2,..,n}{\Delta}\, x - \underset{\text{réel}}{\Delta}\, x,$$

c'est à dire, la différence entre le déplacement dynamique résultant d'une variation successive des paramètres et celui d'un mouvement réel aux variations simultanées. Cette quantité, qui fut égale à zéro pour les systèmes holonomes, devient dans le cas générale

$$(6') \qquad \underset{1,2,..,n}{\Delta}\, x - \underset{\text{réel}}{\Delta}\, x = \frac{1}{2} \underset{1,2,..,n}{\mathrm{S}} \mathrm{A}^{ik} \Delta q_i \, \Delta q_k \equiv \underset{1,2,..,n}{\mathrm{D}} .$$

Je vais appeler $\underset{1,2,..,n}{\mathrm{D}}$ *la déviation non holonome* (ou déviation) appartenant à l'ordre $1, 2, \ldots, n$ des variations paramétriques. La déviation du mouvement réel (variations simultanées) est donc nulle par définition.

Digitized by Google

On peut établir la déviation d'une manière absolue, qui ne fait pas intervenir le mouvement réel. A partir d'une position initiale P (voir Fig. 1), faisons d'abord varier successivement les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$, ce qui amène le système à une position P_1. A partir de P_1, on effectue ensuite les variations inverses, *mais dans le même ordre* qu'auparavant. On arrivera à P', et on a

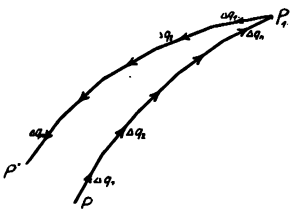


Fig. 1.[1])

$$x_{P'} - x_P = 2 \underset{1,2,..,n}{\mathrm{D}}.$$

Le résultat s'obtient facilement en appliquant deux fois la procédé qui nous servit pour établir la formule (2). Pour le déplacement aux variations simultanées (mouvement réel) on retrouve le résultat de tout à l'heure, à savoir que la déviation est nulle. En effet, le mouvement inverse nous amène dans ce cas-ci au point de départ P.

La déviation totale D, qui vient d'être définie, n'importe moins. C'est la notion de *déviation partielle attribuée à un paramètre spécifique* q_i, qui jouera le rôle fondamental dans la théorie qui va être développée.

Nous venons de voir que pour le mouvement aux variations simultanées, la déviation fut nulle. Afin de pouvoir attribuer une déviation spécifique d_1 au paramètre q_1 par exemple, il faut donc faire voir ce que devient la déviation dans le cas où *on fait subsister la simultanité de variation pour tous les paramètres, sauf un* (q_1 dans le cas actuel).

Faisons donc, à partir de la position donnée P (voir Fig. 2), varier d'abord le paramètre q_1, et ensuite les autres paramètres $(q_2, q_3, \ldots, q_n)$ *simultanément*. A partir de la position P_2, ainsi atteinte, on effectue les opérations inverses, $-\Delta q_1$ d'abord, $(-\Delta q_2, -\Delta q_3, \ldots, -\Delta q_n)$ ensuite. On arrive à P'', et je pose, à titre de définition,

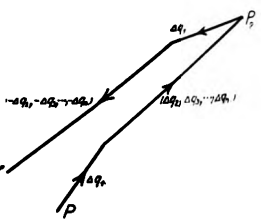


Fig. 2.[2])

$$2\,d_1 = x_{P''} - x_P, \tag{8}$$

en appelant d_1 *la déviation non holonome* (ou déviation) *appartenant au paramètre* q_1.

[1]) Errata. Sur le chemin $P_1 P'$: *lire* $-\Delta q_1, -\Delta q_2, \ldots, -\Delta q_n$ *au lieu de* $\Delta q_1, \Delta q_2, \ldots, \Delta q_n$.

[2]) Errata. Sur le chemin $P_2 P''$: *lire* $-\Delta q_1$, *au lieu de* Δq_1.

Digitized by Google

En calculant l'expression ci-dessus à l'aide des formules (2) et (5) légèrement modifiées, on obtient facilement

$$(9) \quad d_1 = \frac{1}{2}(A^{11}\Delta q_1 \Delta q_1 + A^{12}\Delta q_1 \Delta q_2 + \ldots + A^{1n}\Delta q_1 \Delta q_n).$$

Une comparaison des formules (9), (6') et (4) montre que d_1 est la somme de tous les termes contenant Δq_1, dans la déviation totale $\overset{1,\,2,\ldots,\,n}{D}$. Il est facile de voir qu'on retrouvera d_1 intégralement dans chaque déviation de la forme $\overset{1,\,\alpha_2,\,\alpha_3,\,\alpha_n}{D}$, où $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ est une combinaison quelconque des nombres 2, 3, . . , n.

Si, dans l'équation (9), les variations Δq_i sont empruntées d'un mouvement réel de telle manière qu'on ait

$$\Delta q_i = \dot{q}_i\, dt + \frac{1}{2}\ddot{q}_i\, dt^2,$$

on peut mettre d_1 sous la forme

$$(9') \quad d_1 = \frac{1}{2}(A^{11}\dot{q}_1\dot{q}_1 + A^{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \ldots + A^{1n}\dot{q}_1\dot{q}_n)\, dt^2.$$

Les $\ddot{q}$, portant sur les termes du troisième et du quatrième ordre seulement, n'interviennent donc pas.

3. L'accélération et l'effet de déviation. — La quantité

$$(10) \quad \frac{2d_1}{dt^2} = A^{11}\dot{q}_1\dot{q}_1 + A^{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \ldots + A^{1n}\dot{q}_1\dot{q}_n = \ddot{d}_1,$$

dont les dimensions $[L\,T^{-2}]$ sont celles d'une accélération, sera appelée *l'accélération de déviation appartenant au paramètre* q_1. Je la désignerai symboliquement par $\ddot{d}_1$.

On voit facilement qu'on a

$$(11) \quad \sum_i \ddot{d}_i = \sum_k A^{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k = 0.$$

On pourrait justifier le nom: accélération de déviation, par la considération suivante. Substituons, pendant l'intervalle du temps très petit τ, au mouvement réel (dit mouvement 1), dont nous supposons, pour plus de simplicité, $\dot{q}_i$ = constante, un changement de position (dit mouvement 2), assujetti aux conditions suivantes:

1° Les variations totales des paramètres sont les mêmes que dans le mouvement 1.

Digitized by Google

2° La variation du paramètre q_1 se réalise d'abord, les variations des autres (simultanément entre eux) ensuite.

3° Les valeurs initiales et finales des $\dot{q}_i$ coïncident, et sont égales aux $\dot{q}_i$ dans le mouvement 1.

Cela étant, nous aurons, d'après les développements au-dessus, la relation suivante entre les déplacements dynamiques des deux mouvements:

$$\underset{2}{\Delta x} = \underset{1}{\Delta x} + d_1 = \underset{1}{\dot{x}}\tau + \frac{1}{2}\left(\underset{1}{\ddot{x}} + \frac{2d_1}{\tau^2}\right)\tau^2,$$

ce qui montre que le déplacement dynamique du mouvement 2 est égal à celui d'un mouvement réel ordinaire, ayant une accélération qui est

$$\frac{2d_1}{\tau^2} = \ddot{d}_1$$

plus grande que celle du mouvement 1.

Cela entraine des conséquences d'ordre cinétique intéressantes. En effet, si l'on se donne le déplacement dynamique d'un mouvement réel sous la forme

$$adt + \frac{1}{2}bdt^2,$$

la partie principale dans le développement de la variation de l'énergie cinétique

$$\Delta T = E\,dt + F\,dt^2 + \ldots,$$

sera, on le sait, de la forme

$$E\,dt = dt\,\Sigma\, ma \cdot b. \tag{12}$$

La quantité $E = \dfrac{dT}{dt}$ est celle qu'on appelle l'effet.

En procédant ainsi pour le mouvement 2 au-dessus, on aura

$$\underset{2}{E} = \Sigma m \underset{1}{\dot{x}}(\underset{1}{\ddot{x}} + \ddot{d}_1) = \underset{1}{E} + \Sigma m \underset{1}{\dot{x}}\,\ddot{d}_1.$$

Or, le dernier terme n'est qu'un effet apparent. En effet, en vertu des conditions 1° et 2° ci-dessus, les énergies cinétiques initiales et finales sont les mêmes dans les deux mouvements, et, par conséquent, les effets le doivent être également. L'ambiguité s'explique par le fait que la formule (12) suppose que les fonc-

Digitized by Google

tions $q_i(t)$ admettent des développements en séries suivant des puissances de $(t - t_0)$ dans l'intervalle t_0 à $t_0 + \tau$. Par des conditions imposées au mouvement 2, de telles fonctions paramétriques sont exclues.

La quantité

$$\mathrm{E}_1^d = \Sigma\, m\, \dot{x}\, \ddot{d}_1 \tag{13}$$

va être appelée *l'effet de déviation appartenant au paramètre* q_1. Il mesure, pour ainsi dire, l'erreur qu'on commet, en basant l'évaluation de l'effet d'un mouvement réel sur le déplacement dynamique obtenu en effectuant la variation Δq_1 au-dehors de la simultanité. L'effet de déviation jouera un rôle très important dans la dynamique des systèmes non holonomes.

En conséquence de l'équation (11), on aura une relation analogue entre les effets, à savoir

$$\sum_i \mathrm{E}_i^d = \sum_m m\, \dot{x} \sum_i \ddot{d}_i = 0\,. \tag{14}$$

Note. — Prenons, pour fixer les idées, un système matériel constitué par un seul point, chargé de l'unité de masse, et soit

$$\dot{x} = a_1\, \dot{q}_1 + a_2\, \dot{q}_2 = q_2\, \dot{q}_1 + \dot{q}_2$$

une des composants de vitesses. Le déplacement dynamique du mouvement réel sera

$$\underset{1}{\Delta} x = (q_2\, c_1 + c_2)\, \tau + \frac{1}{2}\, c_1\, c_2\, \tau^2\,,$$

en supposant, comme dans le texte, que

$$\dot{q}_1(t) = c_1\,, \qquad \dot{q}_2(t) = c_2\,,$$

c_1 et c_2 étant des constantes. Convenons que $t = 0$ à la position initiale. J'écris q_1 et q_2 au lieu de $q_1(0)$ et $q_2(0)$, et $q(t)$ quand j'aurai besoin d'envisager la fonction dans l'intervalle 0 à τ.

Remplaçons

$$\left.\begin{aligned} q_1(t) \text{ par } p_1 &= q_1 + c_1 \int_0^t \left\{ 1 + \frac{4}{\pi} \sum_0^\infty \frac{\sin (2m+1)\, t_1}{2m+1} \right\} dt\,, \\ \text{et} \\ q_2(t) \text{ par } p_2 &= q_2 + c_2 \int_0^t \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_0^\infty \frac{\sin (2m+1)\, t_1}{2m+1} \right\} dt\,. \end{aligned}\right\} \quad t_1 = \frac{2\pi}{\tau}\, t$$

Digitized by Google

Puisque la série de Fourier

$$\frac{4}{\pi}\sum_{0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}=\begin{cases}1\\0\\-1\end{cases}\text{pour }\sin x\begin{cases}>0\\=0\\<0\end{cases},$$

on a

$$\left.\begin{matrix}\dot{p}_1=c_1\\ \dot{p}_2=c_2\end{matrix}\right\}\text{pour}\left\{\begin{matrix}t=0 & \dot{p}_1=2c_1\\ t=\tau & \dot{p}_2=0\end{matrix}\right\}\text{pour } 0<t<\frac{\tau}{2}\left\{\begin{matrix}\dot{p}_1=0\\ \dot{p}_2=2c_2\end{matrix}\right\}\text{pour } \frac{\tau}{2}<t<\tau.$$

Les conditions 1°, 2° et 3° dans le texte sont donc bien remplies.

Cela étant, on a

$$\underset{2}{\Delta}x=\int_0^{\tau}(p_2\dot{p}_1+\dot{p}_2)\,dt=$$
$$(q_2c_2+c_1)\tau+\frac{1}{2}c_1c_2\tau^2-\frac{1}{4}c_1c_2\left\{1+\frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots\right)\right\}\tau^2.$$

Le dernier terme devient déjà dans une deuxième approximation, c'est-à-dire, en coupant la série trigonométrique après le second terme,

$$-\frac{1}{4}c_1c_2\left\{1+\frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3^2}\right)\right\}\tau^2=-0{\cdot}475\,\tau^2,$$

et à la limite

$$-\frac{1}{2}c_1c_2\tau^2.$$

Il en résulte que

$$\underset{2}{\Delta}x=\underset{1}{\Delta}x-\frac{1}{2}c_1c_2\tau^2=(q_2c_1+c_2)\tau.$$

Le terme $-\frac{1}{2}c_1c_2\tau^2$ est précisément la déviation

$$d_1=\frac{1}{2}\ddot{d}_1\tau^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial q_1}-\frac{\partial a_1}{\partial q_2}\right)\dot{q}_1\dot{q}_2\tau^2=-\frac{1}{2}c_1c_2\tau^2.$$

En basant l'évaluation de l'effet sur la connaissance de l'expression

$$\underset{2}{\Delta}x=(q_2c_1+c_2)\tau,$$

on aurait obtenu, d'après la formule (12) au-dessus,

$$E=0.$$

Or, en calculant directement ΔT, on trouve

$$\Delta T=\frac{1}{2}((q_2+c_2\tau)c_1+c_2)^2-\frac{1}{2}(q_2c_1+c_2)^2=(q_2c_1+c_2)c_1c_2\tau+\dots,$$

et, par conséquent,

$$E=(q_2c_1+c_2)c_1c_2.$$

Dans la première évaluation $E=0$ est donc contenu l'effet apparent

$$E_1^d=m\dot{x}\ddot{d}_1=-1\,(q_2c_1+c_2)c_1c_2.$$

Digitized by Google

4. Formules de transformations. — Les A^{ik} peuvent, d'après la manière dont ils sont formés, être regardés comme les composants d'un tenseur du second ordre, qui se transforment d'une manière contravariante aux vecteurs de base $\dot{q}_i$.

La quantité

$$A^{ik}\,\xi_i\,\eta_k$$

est donc un invariant si ξ_i et η_i sont deux séries de variables cogrédientes aux variables $\dot{q}_i$. Je supprime, comme je le ferai aussi dans la suite, le signe Σ selon l'usage du calcul tensoriel, quand il y a sommation par rapport au même indice en haut et en bas. L'invariant ci-dessus exprime pour $\xi_i = \eta_i = \dot{q}_i$, la somme

$$\sum_i \sum_k A^{ik}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_k = \sum_i \ddot{d}_i = 0\,.$$

Pour trouver les accélérations de déviations $\ddot{\bar{d}}_i$ aprés un changement de variables

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial \bar{q}_1}\,\dot{\bar{q}}_1 + \frac{\partial q_i}{\partial \bar{q}_2}\,\dot{\bar{q}}_2 + \ldots + \frac{\partial q_i}{\partial \bar{q}_n}\,\dot{\bar{q}}_n = \alpha_i^k\,\dot{\bar{q}}_k\,,$$

il suffit de mettre

$$\ddot{d}_i = \dot{q}_i\,\ddot{d}_i'\,,\quad \ddot{\bar{d}}_i = \dot{\bar{q}}_i\,\ddot{\bar{d}}_i' = \dot{\bar{q}}_i \sum_k \bar{A}^{ik}\,\dot{\bar{q}}_k\,,$$

et de remarquer qu'en vertu de

$$\bar{A}^{ik}\,\bar{\xi}_i\,\dot{\bar{q}}_k = A^{rs}\,\dot{q}_s\,\xi_r = A^{rs}\,\dot{q}_s\,\alpha_r^i\,\bar{\xi}_i\,,$$

on a

$$\bar{A}^{ik}\,\dot{\bar{q}}_k = \alpha_r^i\,A^{rs}\,\dot{q}_s\,.$$

Il en résulte que

$$\ddot{\bar{d}}_i' = \alpha_r^i\,A^{rs}\,\dot{q}_s = \sum_r \alpha_r^i\,\ddot{d}_r' \tag{15}$$

et, par conséquent,

$$\ddot{\bar{d}}_i = \dot{\bar{q}}_i\,\ddot{\bar{d}}_i' = \dot{\bar{q}}_i \sum_r \alpha_r^i\,\ddot{d}_r'\,.$$

5. Quelques théorèmes et lemmes sur la déviation importants dans les applications. — Désignons par $[\Delta q_{a_1}, \Delta q_{a_2}, \ldots, \Delta q_{a_n}]$ le déplacement dynamique résultant d'une vari-

Digitized by Google

ation successive opérée sur les paramètres q_i dans l'ordre où ils paraissent dans l'expression entre les crochets, et par $(\Delta q_1, \Delta q_2, \ldots, \Delta q_n)$ le déplacement dynamique dû à la variation simultanée. Par le symbole mixte $[\Delta q_{\alpha_1}, \Delta q_{\alpha_2}, (\Delta q_{\alpha_3}, \ldots, \Delta q_{\alpha_p}) \Delta q_{\alpha_{p+1}}, \ldots, \Delta q_{\alpha_n}]$ il faut donc entendre le déplacement qu'on obtient en faisant d'abord varier q_{α_1} et q_{α_2} successivement, ensuite $q_{\alpha_3}, \ldots, q_{\alpha_p}$ simultanément et, enfin, $q_{\alpha_{p+1}}, \ldots, q_{\alpha_n}$ successivement.

Dans les applications il s'agit surtout de pouvoir déterminer d'une manière aussi simple que possible, les accélérations de déviations. Les $\ddot{d}_1$, par exemple, forment un ensemble de vecteurs, puisque il y en a un pour chacune des coordonnées du système. Il y en a donc trois à chaque point, qui déterminent les composants du vecteur d'accélération de déviation appliquée à ce point.

En comparant les deux expressions

$$d_1 = \frac{1}{2} A^{1k} \Delta q_1 \Delta q_k \quad \text{et} \quad \ddot{d}_1 = A^{1k} \dot{q}_1 \dot{q}_k,$$

on voit qu'on peut obtenir $\ddot{d}_1$ en évaluant le déplacement $2d_1$ avec $\Delta q_i = \dot{q}_i$. En s'appuyant sur les développements plus haut sur les déviations spécifiques d_i, on obtient les lemmes suivantes:

Lemme 1.

Les composants de l'accélération de déviation $\ddot{d}_i$ s'obtiennent en calculant les Δx dans le déplacement dynamique $[\Delta q_i, (\Delta q_{\alpha_2}, \ldots, \Delta q_{\alpha_n}), -\Delta q_i, (-\Delta q_{\alpha_2}, \ldots, -\Delta q_{\alpha_n})]$, et en y mettant $\Delta q_k = \dot{q}_k$.

En effet, nous venons de voir (p. 288) que les variations que subissent les x dans ce déplacement, sont précisément $2d_i$. Il va sans dire que $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, est une combinaison quelconque sans répétition des n premiers nombres naturels sauf i.

Lemme 2.

Les composants de l'accélération de déviation $\ddot{d}_i$ s'obtiennent en calculant (avec $\Delta q_k = \dot{q}_k$) les Δx dans le déplacement $[\Delta q_i, [\Delta q_{\alpha_2}, \ldots], -\Delta q_i, [-\Delta q_{\alpha_2}, \ldots]]$, où $[\Delta q_{\alpha_2}, \ldots]$ représente un déplacement dynamique absolument arbitraire portant sur tous les paramètres sauf q_i, et en supprimant dans le résultat tous les termes qui ne contiennent pas $\dot{q}_i$.

La lemme se démontre facilement en tenant compte d'une

Digitized by Google

remarque faite plus haut (p. 289), selon laquelle la déviation d_i est la somme de tous les termes en Δq_i dans la déviation totale D. D'après la définition même de cette quantité (voir p. 288), $\overset{i,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}{}$ les Δx dans le déplacement de la lemme ci-dessus contiennent les mêmes termes en Δq_i que $2\,\overset{i,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}{\mathrm{D}}$.

Si les déplacements, portant sur tous les paramètres à la fois, deviennent compliqués, on peut avoir recours à la

Lemme 3.

Les composants de l'accélération $\ddot{d}_i$ sont la somme des Δx dans les déplacements $[\Delta q_i, \Delta q_1, -\Delta q_i, -\Delta q_1]$, $[\Delta q_i, \Delta q_2, -\Delta q_i, -\Delta q_2]$, $\ldots$, $[\Delta q_i, \Delta q_n, -\Delta q_i, -\Delta q_n]$, *calculés avec* $\Delta q_k = \dot{q}_k$.

En effet, Δx dans le premier déplacement, par exemple, est évidemment le seul terme $\mathrm{A}^{i1}\,\Delta q_i\,\Delta q_1$.

Lemme 4.

Si $\ddot{d}_i$ s'annule identiquement, aucune des autres accélérations de déviations $\ddot{d}_k$ ne contient $\dot{q}_i$, et on peut supposer Δq_i égal à zéro dans les déplacements envisagés dans les lemmes ci-dessus.

En effet, $\ddot{d}_i$ étant nul, tous les A^{ik} ($k = 1, 2, \ldots, n$) s'annulent également. Le terme en $\dot{q}_i$ dans $\ddot{d}_k$ est

$$\mathrm{A}^{ki}\,\dot{q}_k\,\dot{q}_i\,.$$

Or on a

$$\mathrm{A}^{ki} = -\,\mathrm{A}^{ik} = 0\,.$$

On verra plus loin que les calculs mentionnés dans les lemmes au-dessus, peuvent être remplacés par des opérations géométriques simples et intuitives. De là résulte le plus important des avantages »économiques«, au sens machien du mot, de la méthode.

Quand on a trouvé les vecteurs d'accélérations de déviations, $\vec{\ddot{d}}_i$, il faut, pour évaluer les

$$\mathrm{E}_i^d = \Sigma\, m\, \dot{x}\, \ddot{d}_i\,,$$

former les produits scalaires $(m\,\vec{v}\cdot\vec{\ddot{d}}_i)$ et en faire la somme par rapport à tous les points du système. Les calculs se simplifient beaucoup en tenant compte de certains théorèmes analogues au théorème de Koenig pour la force vive, et à celui de M. Saint-Germain pour l'énergie d'accélération.

Digitized by Google

Afin de pouvoir les développer d'une manière plus claire, modifions légèrement les notations en mettant x_1, y_1, z_1 au lieu de x_1, x_2, x_3: x_2, y_2, z_2 au lieu de x_4, x_5, x_6 etc. (voir p. 282), et écrivons d'une manière générale:

$$(16)\quad \begin{cases} \dot{x} = (\alpha_1 \dot{q}_1 + \ldots + \alpha_n \dot{q}_n) + (a'_1 \dot{q}_1 + \ldots + a'_n \dot{q}_n) = \dot{\xi} + \dot{x}' \\ \dot{y} = (\beta_1 \dot{q}_1 + \ldots + \beta_n \dot{q}_n) + (b'_1 \dot{q}_1 + \ldots + b'_n \dot{q}_n) = \dot{\eta} + \dot{y}' \\ \dot{z} = (\gamma_1 \dot{q}_1 + \ldots + \gamma_n \dot{q}_n) + (c'_1 \dot{q}_1 + \ldots + c'_n \dot{q}_n) = \dot{\zeta} + \dot{z}', \end{cases}$$

les $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$, et $\dot{x}'$, $\dot{y}'$, $\dot{z}'$ étant les vitesses du centre de gravité et celles du point actuel dans le mouvement relatif autour du centre de gravité.

Calculons d'abord les composants de l'accélération de déviation. On a

$$\ddot{d}_{1x} = A^{1k} \dot{q}_1 \dot{q}_k =$$
$$= \dot{q}_1 \left\{ \left(\frac{\partial(\alpha_2 + a'_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(\alpha_1 + a'_1)}{\partial q_2} \right) \dot{q}_2 + \ldots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial(\alpha_n + a'_n)}{\partial q_1} - \frac{\partial(\alpha_1 + a'_1)}{\partial q_n} \right) \dot{q}_n \right\} = \dot{q}_1 \left\{ \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_2} \right) \dot{q}_2 + \ldots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial \alpha_n}{\partial q_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_n} \right) \dot{q}_n \right\} + \dot{q}_1 \left\{ \left(\frac{\partial a'_2}{\partial q_1} - \frac{\partial a'_1}{\partial q_2} \right) \dot{q}_2 + \ldots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial a'_n}{\partial q_1} - \frac{\partial a'_1}{\partial q_n} \right) \dot{q}_n \right\} = A_\alpha^{1k} \dot{q}_1 \dot{q}_k + A_{a'}^{1k} \dot{q}_1 \dot{q}_k = \ddot{\delta}_{1x} + \ddot{d}_{1x}'.$$

En tenant compte des expressions analogues qu'on obtiendrait pour $\ddot{d}_{1y}$ et $\ddot{d}_{1z}$, on peut énoncer le théorème suivant:

Théorème 1.

L'accélération de déviation d'un point quelconque d'un système matériel est égale à celle du centre de gravité ($\ddot{\delta}_1$), augmentée de l'accélération de déviation du point calculée dans le mouvement relatif ($\ddot{d}'_1$).

Passons maintenant à l'effet de déviation

$$E_{1x}^d = \sum_m m \dot{x} \ddot{d}_{1x}.$$

Puisque on a

$$(17)\qquad \sum_m m \dot{x}' = \sum_m m (a'_1 \dot{q}_1 + \ldots + a'_n \dot{q}_n) \equiv 0,$$

quelles que soient les $\dot{q}_i$, on doit avoir également

Digitized by Google

(18) $$\sum_m m\, a'_i \equiv 0\,,$$

ce qui entraine

$$\sum_m m \frac{\partial a'_i}{\partial q_k} = 0\,.$$

Cela étant, développons l'expression

$$\sum_m m\, \dot{x}\, \ddot{d}_{1x} = \sum_m m\, (\dot{\xi} + \dot{x}')\, (\ddot{\delta}_{1x} + \ddot{d}'_{1x})\,.$$

Or,

$$\sum_m m\, \dot{\xi}\, \ddot{d}'_{1x} = \dot{\xi} \sum_m m\, A^{1k}_{a'}\, \dot{q}_k\, \dot{q}_1 = \dot{q}_1\, \dot{\xi} \sum_k \dot{q}_k \sum_m m \left(\frac{\partial a'_k}{\partial q_1} - \frac{\partial a'_1}{\partial q_k}\right) = 0\,,$$

et

$$\sum_m m\, \dot{x}'\, \ddot{\delta}_{1x} = \ddot{\delta}_{1x} \sum m\, \dot{x}' = 0\,,$$

en vertu de (17) et (18).

Il en résulte donc que

$$E^d_{1x} = \sum_m m\, \dot{\xi}\, \ddot{\delta}_{1x} + \sum_m m\, \dot{x}'\, \ddot{d}'_{1x} = M\, \dot{\xi}\, \ddot{\delta}_{1x} + \sum_m m\, \dot{x}'\, \ddot{d}'_{1x}.$$

On obtient des expressions analogues pour E^d_{1y} et E^d_{1z}, et on peut énoncer le théorème analogue au théorème de Kœnig, qui est le suivant:

Théorème 2.

L'effet de déviation d'un système matériel est égal à celui du centre de gravité, chargé de la masse totale, augmenté de l'effet calculé dans le mouvement relatif autour du centre de gravité.

6. Systèmes intérieurement holonomes. Les théorèmes ci-dessus se simplifient d'une manière très remarquable pour une certaine classe de systèmes matériels d'une très grande généralité. Il s'agit des systèmes dont le mouvement relatif autour du centre de gravité s'exprime par moyen des équations holonomes, c'est-à-dire, où les expressions

$$(a'_1\, \dot{q}_1 + a'_2\, \dot{q}_2 + \ldots + a'_n\, \dot{q}_n)\, dt$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

des équations (16) sont *des différentielles totales exactes.* Je vais les appeler *systèmes intérieurement holonomes.*

Pour ces systèmes les accélérations de déviations, ainsi que l'effet de déviation calculés dans le mouvement relatif autour

Digitized by Google

du centre de gravité, s'annulent, et on peut énoncer les deux théorèmes suivants:

Théorème 1bis.

L'accélération de déviation est la même pour tous les points d'un système intérieurement holonome et égale à celle du centre de gravité.

Théorème 2bis.

L'effet de déviation d'un système intérieurement holonome est égal à celui du centre de gravité, chargé de la masse totale.

En appliquant le théorème 2bis, on facilite souvant les calculs, en se servant du théorème 1bis pour trouver l'accélération de déviation du centre de gravité. Cette accélération étant, d'après ce théorème-ci, égale à celle d'un point quelconque du système, on peut choisir ce point convenablement.

Il sera, par conséquent, très important de savoir si un système donné est, ou non, intérieurement holonome. Je me borne ici à indiquer sur ce sujet une lemme assez spéciale, dont je vais faire usage dans les exemples, tout en me réservant de revenir plus amplement à la théorie des systèmes intérieurement holonomes dans un autre travail.

Lemme 5.

Si S est un système holonome, dont le mouvement relatif autour du centre de gravité s'exprime par moyen de certains paramètres $p_1, p_2, \ldots$, *et si l'on imprime à ce système des nouvelles liaisons non holonomes, sans imposer aucune restriction sur les paramètres primitifs* $p_1, p_2 \ldots$, *le système S' ainsi constitué sera intériereument holonome.*

L'énoncé est bien évidente. Le mouvement relatif reste le même, et on imprime seulement certaines conditions sur le mouvement du centre de gravité. En mettant les vitesses du système S' sous la forme (16), les $(a'_1 \dot{q}_1 + a'_2 \dot{q}_2 + \ldots + a'_n \dot{q}_n)\, dt$ etc. seront nécessairement des différentielles totales exactes.

Le cerceau en fournit un exemple. Considéré comme un corps solide libre, il constitue un système holonome S, dont le mouvement relatif s'exprime par moyen des angles d'Euler. La condition de rouler sans glisser sur un plan, imprime certaines conditions sur le mouvement du centre de gravité, tont en laissant libres les angles d'Euler.

Digitized by Google

DEUXIÈME PARTIE. DYNAMIQUE.

1. L'effet de déviation et les équations du mouvement. — Dans la partie qui précède, nous venons d'introduire certaines notions, celles d'accélération de déviation et d'effet de déviation, et on verra dans la partie présente que la théorie cinématique ainsi développée, se prête d'une manière directe et facile aux exigences de la Dynamique.

Pour un système matériel, dont les équations de liaisons s'écrivent

$$\dot{x} = a_1 \dot{q}_1 + a_2 \dot{q}_2 + \ldots + a_n \dot{q}_n,$$

les équations du mouvement, déduites du principe de d'Alembert, seront

$$\sum_m m\, a_i \ddot{x} = Q_i. \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les équations de Lagrange correspondantes sont

$$L_i \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i.$$

En développant les expressions L_i[1]) on trouve

$$(19) \quad L_i = \sum_m m\, a_i \ddot{x} - \sum_m m\, \dot{x}\left\{\left(\frac{\partial a_1}{\partial q_i} - \frac{\partial a_i}{\partial q_1}\right)\dot{q}_1 + \ldots + \left(\frac{\partial a_n}{\partial q_i} - \frac{\partial a_i}{\partial q_n}\right)\dot{q}_n\right\}.$$

Si l'on écrit l'i-ième équation de Lagrange sous la forme

$$L_i \dot{q}_i = Q_i \dot{q}_i,$$

on voit que pour la rendre exacte, il faut ajouter au premier membre la quantité

$$\sum_m m\, \dot{x}\left\{\left(\frac{\partial a_1}{\partial q_i} - \frac{\partial a_i}{\partial q_1}\right)\dot{q}_i \dot{q}_1 + \ldots + \left(\frac{\partial a_n}{\partial q_i} - \frac{\partial a_i}{\partial q_n}\right)\dot{q}_i \dot{q}_n\right\},$$

ce qui est précisément l'effet de déviation appartenant au paramètre q_i

$$E_i^d = \sum_m m\, \dot{x}\, \ddot{d}_i.$$

En envisageant la mise en équation d'un problème dynamique d'un point de vue cinétique, elle revient à ceci: la somme des travaux pour l'unité du temps des forces données

[1]) APPELL, *Traité de la mécanique rationnelle*, 3ième édition, tome II, p. 376.

Digitized by Google

$$Q_1 \dot{q}_1 + Q_2 \dot{q}_2 + \ldots + Q_n \dot{q}_n$$

étant connue, trouver à chacun des travaux partiels

$$Q_i \dot{q}_i$$

la partie correspondante de l'augmentation de l'énergie cinétique (l'effet). Les développements au-dessus nous permettent d'énoncer sur ce sujet le théorème suivant:

Théorème 3.

Si L_i *est l'opérateur de Lagrange, l'équation cinétique*

$$\sum_i L_i \dot{q}_i = \Sigma Q_i \dot{q}_i \tag{20}$$

a lieu pendant tout le mouvement pour tous les systèmes matériels aux liaisons indépendantes du temps. Or, les équations partielles

$$L_i \dot{q}_i = Q_i \dot{q}_i \tag{21}$$

ne s'appliquent que pour les systèmes sans effet de déviation. Pour les autres il faut ajouter à l'effet $L_i \dot{q}_i$ *l'effet de déviation, de manière qu'on ait*

$$L_i \dot{q}_i + E_i^d = Q_i \dot{q}_i . \tag{21'}$$

Puisque on a

$$\sum_i E_i^d = 0 ,$$

l'équation (20) est une conséquence soit des équations (21), soit des équations (21').

Le fait que les équations de Lagrange ne sont pas générales, et qu'il faut ajouter dans l'*i*-ième de ces équations un terme comme le dernier dans l'équation (19) au-dessus, est, il va sans dire, bien connu. Ce qui est, je le crois, le nouveau dans l'exposition au-dessus, c'est que E_i^d dans les equations (21'), au lieu d'être tout simplement une expression formelle auxiliaire, se présente sous la forme d'une notion cinétique bien définie et dont les propriétés sont connues d'avance d'après la théorie cinématique dont j'ai essayé de développer les élements dans la partie précédente. En s'appuyant sur cette théorie, on peut, nous en verrons tout de suite des exemples, ou

1° se rendre compte par des considérations cinématiques souvant très simples et directes, si le système donné admet les équations de Lagrange, ou,

Digitized by Google

2° dans le cas contraire, déterminer les termes supplémentaires E_i^a d'une manière souvant très facile.

La théorie de la déviation non holonome étend donc le domaine d'application des équations de Lagrange.

2. Exemple d'un solide roulant sur une arête vive. — Traitons, au titre d'exemple, le cas d'un solide homogène de révolution, terminé par une arête vive équatoriale (C), ayant la forme d'un cercle de rayon a, et assujetti à rouler sans glisser sur un plan horizontal fixe, qu'il touche par l'arête circulaire.

Dans Fig. 3 le solide est représenté par l'arête C. $Ox_1\, y_1\, z_1$ est un trièdre fixe. $Gx_1'\, y_1'\, z_1'$, dont les axes sont parallèles à celles de $Ox_1\, y_1\, z_1$, a son origine G au centre de gravité du corps, comme l'a aussi le trièdre $Gx\, y\, z$, dont l'axe Gz est normale au plan du cercle C, et dont l'axe Gx reste toujours horizontale et perpendiculaire au plan $z\,G\,z_1'$. Le point de contact H se trouve sur la partie négative de Gy. GA est un rayon fixe dans le corps, mais d'ailleurs arbitraire.

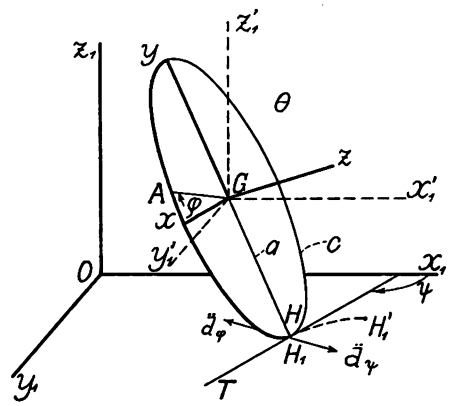


Fig. 3.

Choisissons comme paramètres indépendantes les trois angles d'Euler

$$q_1 = \theta,\ q_2 = \psi,\ q_3 = \varphi.$$

Le système ainsi constitué est, d'après la lemme 5 (p. 298), intérieurement holonome. Son effet de déviation est donc celui du centre de gravité. Or, puisque l'accélération de déviation est la même pour tous les points, choisissons le point H actuellement en contact avec le plan à H_1 pour la déterminer.

L'accélération $\ddot{d}_1 = \ddot{d}_\theta$. D'après la lemme 1 (p. 294) $\ddot{d}_\theta$ en H est le changement de position que subit ce point pendant le déplacement du système $[\Delta\theta, (\Delta\psi, \Delta\varphi), -\Delta\theta, (-\Delta\psi, -\Delta\varphi)]$ en supposant $\Delta\theta = \dot{\theta}$, $\Delta\psi = \dot{\psi}$, $\Delta\varphi = \dot{\varphi}$. Suivons d'abord le point

Digitized by Google

de contanct *du plan*, H_1. Pendant la variation $\Delta\theta$ H_1 ne bouge pas, pendant la variation simultané $(\Delta\psi, \Delta\varphi)$ H_1 décrit une certaine trace $H_1 H_1'$. Pendant $-\Delta\theta$, H_1 ne bouge non plus, et $(-\Delta\psi, -\Delta\varphi)$, enfin, l'amène au point de départ H_1. L'angle total qu'a roulé le cercle, étant $\Delta\varphi - \Delta\varphi = 0$, le même point H du cercle est en contact avant et après le déplacement. Le déplacement de H a donc été nul, et on a

$$\ddot{d}_\theta = 0.$$

On vient donc d'obtenir de manière la plus simple et intuitive, le résultat connu que l'équation de Lagrange s'applique au paramètre θ dans le problème actuel.

L'accélération $\ddot{d}_2 = \ddot{d}_\psi$. Puisque $\ddot{d}_\theta = 0$, $\dot{\theta}$ n'entre pas dans les autres accélérations de déviations, et on peut supposer $\theta =$ constante dans les déplacements qu'on va envisager. (Voir la lemme 4 p. 295). Au lieu de considérer le déplacement $[\Delta\psi, (\Delta\varphi, \Delta\theta), -\Delta\psi, (-\Delta\varphi, -\Delta\theta)]$, on peut donc se borner au déplacement plus simple qui est $[\Delta\psi, \Delta\varphi, -\Delta\psi, -\Delta\varphi]$. On voit facilement (Fig. 4) que le déplacement $\Delta\psi$ suivi de $\Delta\varphi$, amène le point de contact, H_1, à H'_1. Partant de cette position $-\Delta\psi$, suivi de $-\Delta\varphi$, l'amène enfin à H_ψ, $\overrightarrow{H_1 H_\psi}$ étant perpendiculaire à $H_1 T$. (Fig. 3). On a

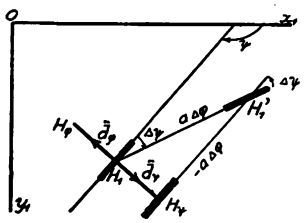


Fig. 4.

$$H_1 H_\psi = a \cdot \Delta\psi \cdot \Delta\varphi = a\,\dot{\psi}\,\dot{\varphi} = \ddot{d}_\psi.$$

On obtient donc $\ddot{d}_\psi$ directement comme un vecteur

$$\overrightarrow{H_1 H_\psi},$$

et on n'a pas besoin de chercher ses composants séparément.

L'accélération $\ddot{d}_3 = \ddot{d}_\varphi$. Puisque la somme

$$\ddot{d}_\theta + \ddot{d}_\psi + \ddot{d}_\varphi = 0,$$

on a

$$\vec{\ddot{d}}_\varphi = -\vec{\ddot{d}}_\psi = -\overrightarrow{H_1 H_\psi} = \overrightarrow{H_\psi H_1}.$$

Dans Fig. 4 $\vec{\ddot{d}}_\varphi$ est représenté par $\overrightarrow{H_1 H_\varphi}$ égal et directement opposé à $\overrightarrow{H_1 H_\psi}$.

Digitized by Google

Les effets E_θ^d, E_ψ^d, E_φ^d. Le premier est égal à zéro, puisque $\ddot{d}_\theta$ l'est. Puisque le système est intérieurement holonome, il suffit, d'après le théorème 2bis, de calculer l'effet du centre de gravité. Pour évaluer le produit scalaire

$$\left(\vec{v}_G \cdot \vec{\ddot{d}}_\psi\right),$$

il suffit remarquer que le composant de la vitesse de G suivant la direction de $\vec{\ddot{d}}_\psi = \overrightarrow{H_1 H_\psi}$ est

$$a\ \dot{\theta} \sin\theta.$$

On a donc, en mettant la masse tolale égale à l'unité,

$$E_\psi^d = a^2\, \dot{\theta}\, \dot{\psi}\, \dot{\varphi} \sin\theta,$$

et, en vertu de

$$\sum_i E_i^d = 0,$$

$$E_\varphi^d = -E_\psi^d = -a^2\, \dot{\theta}\, \dot{\psi}\, \dot{\varphi} \sin\theta.$$

Les équations du mouvement deviennent donc

$$L_\theta = Q_\theta$$
$$L_\psi + a^2\, \dot{\theta}\, \dot{\varphi} \sin\theta = Q_\psi$$
$$L_\varphi - a^2\, \dot{\theta}\, \dot{\psi} \sin\theta = Q_\varphi$$

Avec

$$2T = (A + a^2)\, \dot{\theta}^2 + A\, \dot{\psi}^2 \sin^2\theta + (C + a^2)(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})^2,$$

où A, A, C sont les moments d'inerties principales, les équations deviennent après des rédutions

$$(A + a^2)\, \dot{p} - (AR - Cr)\, q + a^2 qr = Q_\theta$$
$$A\dot{q} + (AR - Cr)\, p = \theta_\psi \operatorname{cosec}\theta - \theta_\varphi \operatorname{cotg}\theta$$
$$(C + a^2)\, \dot{r} - a^2 p q = Q_\varphi,$$

où

$$p = \dot{\theta},\ q = \dot{\psi}\sin\theta,\ r = R + \dot{\varphi} = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}.$$

3. Le domaine des équations de Lagrange. — En divisant l'équation

Digitized by Google

$$L_1 \dot{q}_1 + E_1^d = Q_1 \cdot \dot{q}_1$$

par $\dot{q}_1$, elle devient

$$L_1 + \frac{1}{\dot{q}_1} E_1^d = Q_1.$$

Le terme $\frac{1}{\dot{q}_1} E_1^d$ se présente comme une forme quadratique assez compliquée de $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$

$$\sum_m m (a_1 \dot{q}_1 + a_2 \dot{q}_2 + \ldots + a_n \dot{q}_n) \sum_k A^{1k} \dot{q}_k .$$

Pour que l'équation de Lagrange puisse s'appliquer au paramètre q_1, il faut et il suffit donc que cette forme s'annule comme l'a déjà remarqué M. APPELL[1]). Faut des notions cinématiques telles que la théorie présente les a fournit, la forme au-dessus est dépourvue d'intérêt intrinsèque et devient, on l'admettra, peu maniable. C'est pour cette raison, je le crois, que les seuls cas traités par M. Appell sont ceux où la forme s'annule puisque $\sum A^{1k} \dot{q}_k$ devient zéro, ce qui revient à affirmer que l'accélération de déviation $\ddot{d}_1$ disparaisse. M. Appell mentionne le cas d'un système holonome tout entier et le cas où les déplacements virtuels peuvent se mettre, „sous la forme d'une différentielle totale exacte suivie d'une expression différentielle ne contenant pas $\dot{q}_1$", ce qui est bien la condition pour que l'accélération de déviation $\ddot{d}_1$ seul s'annule.

Pour mettre en évidence les services que peut rendre la théorie de la déviation, considérons le système présenté dans Fig. 5. Ce système n'appertient ni aux systèmes holonomes, ni aux systèmes remplissant la dernière condition ci-dessus de M. Appell. Le système est constitué par un solide non homogène de révolution, d'une forme analogue à celle de la toupie, ayant une arête vive circulaire C, dont le centre est situé sur l'axe de révolution. Le corps est assujétti à rouler sans glisser sur le plan horizontal fixe $Ox_1 y_1$, qu'il touche par l'arête, en s'appuyant de plus par un point K de son axe sur ce même plan. En K glissement sans frottement est permis.

Les équations de Lagrange peuvent- elles s'appliquer? Pour

[1]) APPELL, *Traité*, tome II, p. 377.

Digitized by Google

s'en rendre compte il faudrait évaluer la forme quadratique envisagée par M. Appell et on aboutirait qu'après des calculs assez longues. Or en utilisant au contraire la notion d'effet de déviation, on peut d'une manière rapide et très intuitive mettre en évidence la condition suffisante et nécessaire pour que l'application des équations de Lagrange soit admissible.

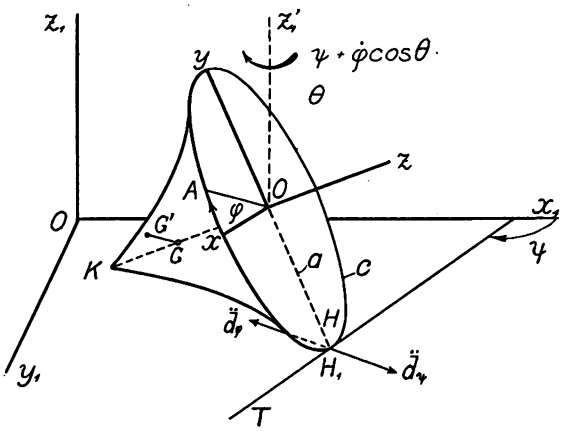


Fig. 5.

Le système est intérieurement holonome d'après la lemme 5. Le système S de cette lemme est ici un corps solide holonome assujetti à la seule condition: $\theta =$ constante.

Les seuls paramètres indépendants sont les angles ψ et φ et on retrouve la même accélération $\vec{d}_\psi = a\,\dot{\psi}\,\dot{\varphi}$ que dans l'exemple au-dessus en effectuant rapidement dans la pensée le déplacement $[\Delta\psi, \Delta\varphi, -\Delta\psi, -\Delta\varphi]$. Quant à $\vec{d}_\varphi$, on a $\vec{d}_\varphi = -\vec{d}_\psi$. Elles sont toutes les deux perpendiculaires à HT, c'est-à-dire elles sont contenues dans le plan HOz. Pour que les effets de déviations s'annulent, il faut et suffit donc que la vitesse du centre de gravité soit perpendiculaire à ce même plan. Or on voit immédiatement que l'axe de rotation instantanée passe par H, et qu'il est dans le plan HOz. Il faut donc que le centre de gravité G se trouve toujours dans ce plan, ce qui n'est possible que si G est situé sur l'axe de révolution du solide OK.

Voici comment la théorie de la déviation nous permet d'utiliser les équations de Lagrange aussi dans le cas contraire. On évaluera très facilement l'effet E^d_ψ par exemple. Supposons que le centre de gravité est à G', où GG' est parallèle au rayon OA. La vitesse de G' selon la direction positive de $\vec{d}_\psi$ est évidemment (GG' $= b$)

Digitized by Google

$$- b \cos \varphi (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta),$$

et on a

$$E^d_\psi = - ab \cos \varphi (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \dot{\psi} \dot{\varphi} = - E^d_\varphi .$$

Avec les termes supplémentaires

$$\frac{1}{\dot{\psi}} E^d_\psi , \frac{1}{\dot{\varphi}} E^d_\varphi$$

les équations de Lagrange s'appliquent. Pour $\varphi = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$ les E^d s'annulent. Le centre de gravité se trouve donc instantanément dans le plan HOz, ce qui était la situation permanente dans le cas au-dessus.

La théorie de la déviation est au fond une théorie sur la sommabilité des *mouvements* infinitésimals dans le cadre des déplacements dynamiques, soit au point de vue purement *cinématique* (accélération de déviation) soit au point de vue cinétique (effet de déviation). Les notions de cette théorie entrainent deux manières non coïncidentes de classifier les systèmes matériels. On peut distinguer entre des systèmes *sans* et des systèmes *avec* accélération de déviation, ce qui revient à la distinction connue entre des systèmes holonomes et non holonomes.

Or, puisque l'effet de déviation peut bien être nul sans que les accélérations le sont, on sera amené à envisager les deux classes de systèmes suivantes: des systèmes *sans* et des systèmes *avec* effet de déviation.

Au point de vue d'application des équations de Lagrange c'est donc, nous venons de le voir, la dernière classification qui est d'importance. En effet, nous pouvons résumer les résultats au-dessus dans le théorème suivant:

Théorème 4.

Les équations de Lagrange peuvent s'appliquer à tous les systèmes sans effet de déviation et à ces systèmes seulement.

Cette énoncé embrasse aussi les cas d'une application partielle de ces équations. Pour que l'équation de Lagrange s'applique au paramètre q_i, il faut et il suffit que l'effet de déviation appartenant à ce paramètre, s'annule.

Les formules de transformations développées plus haut nous permettent d'énoncer sur ce sujet le théorème important qui est le suivant:

Digitized by Google

Théorème 5.

La propriété d'être sans effet de déviation, ou, ce qui revient au même, d'admettre l'application des équations de Lagrange à tous les paramètres, est une propriété intrinsèque du système matériel indépendant du choix des paramètres.

Soient en effet q_i les paramètres primitifs et E_i^d les effets de déviations correspondants. Introduisons des nouvelles variables $\bar{q}_i$ et soient

$$\dot{q}_i = \alpha_i^k \dot{\bar{q}}_k$$

les équations de transformations.

On a par hypothèse $E_i^d = 0$, et par conséquent

$$E_i^{d'} \equiv \frac{1}{\dot{q}} E_i^d = \sum_m m \dot{x} A^{ik} \dot{q}_k = 0 .$$

En utilisant des lettres surlignées pour les quantités correspondantes exprimées par moyen des nouvelles variables, on obtient d'après les formules de transformations p. 293:

$$\bar{E}_i^{d'} \equiv \sum m \dot{x} \bar{A}^{ik} \dot{\bar{q}}_k = \sum m \dot{x} \alpha_r^i A^{rs} \dot{q}_s = \sum \alpha_r^i E_r^{d'} = 0$$

et par conséquent

$$\bar{E}_i^d = \dot{\bar{q}}_i \bar{E}_i^{d'} = 0 .$$

On voit en même temps que la propriété d'admettre l'application des équations de Lagrange à certains paramètres *ne subsiste pas*, en générale, après une transformation des paramètres indépendants.

Note. Les résultats obtenus au-dessus se généraliseront facilement, afin de les mettre applicable aux systèmes dont les liaisons dépendent du temps. Il suffit de regarder t comme un $(n+1)$ième paramètre q_{n+1}, en mettant dans les calculs $\dot{q}_{n+1} = 1$.

Digitized by Google

Digitized by Google

BEVIS FOR KUGLENS MINIMALEGENSKAB

AF

T. BONNESEN

Kuglen har mindre Overflade end ethvert andet Legeme med samme Rumfang. Med nogle Bemærkninger om Problemets Historie (Steiner, Schwarz, Minkowski, Tonelli) gengav Foredragsholderen det Bevis, han har givet i Festskrift til C. Juel (Mat. Tidsskr. B. 1925), Bollettino della unione mat. Italiana t. IV 1925, Math. Annalen Bd. 95 (1925).

Digitized by Google

Digitized by Google

ON ROTATIONS IN FOUR-SPACE DETERMINED BY A SKEW-SYMMETRIC DYADIC

(ABSTRACT)

BY

ALMAR NÆSS

§ 1. Let there be given an ordinary four-space of constant zero curvature, and an orthogonal coordinate system. Let the set of unit vectors be e_i, $i = 1, 2, 3, 4$, and any point v_i be given by its radius vector $\mathfrak{v} = e_i v_i$. Further let Γ be a four-dimensional Gibbsian dyadic (tensor of the second order) and dt an infinitesimal. Hence any point (radius vector) $\mathfrak{v}$ is transformed into a nearby point $\mathfrak{v}'$ by the equation

$$\mathfrak{v}' = \mathfrak{v} \cdot (I + \Gamma dt) \tag{1}$$

where the dot indicates the scalar product and I the idem-factor.

We can show that the transformation (1) is an infinitesimal rotation around the origin if — and only if — Γ is a skew-symmetric dyadic. That is, any rotation in S_4 (of this kind) is characterized by a skew-symmetric dyadic or, which amounts to the same, by a skew-symmetric matrix of the fourth order, and vice versa.

It is our purpose here shortly and omitting all proofs to indicate that all the properties of rotation in S_4 — determined previously by F. N. Cole and others — are got directly and very easily from the properties of the skew-symmetric dyadic (matrix).

Let us put

$$\Gamma = e_i e_j c_{ij} \tag{2}$$

where

$$c_{ii} = 0, \quad c_{ij} = -c_{ji}.$$

Digitized by Google

Then we have

$$|c_{ij}| = C^2 \tag{4}$$

where

$$C = c_{12}\,c_{34} + c_{23}\,c_{14} - c_{13}\,c_{24}. \tag{5}$$

All cofactors of the third order of the determinant $|c_{ij}|$ contain C as a factor.

Hence: The matrix c_{ij} is either of rank four or of rank two.

The necessary and sufficient condition that c_{ij} be of rank two is that $C = 0$.

If in general $C \neq 0$, there exists in S_4 no point $\mathfrak{v}$ such that $\mathfrak{v} \cdot \Gamma = 0$. If $C = 0$, Γ must be planar, i. e., the matrix c_{ij} determines a plane, and all vectors $\mathfrak{v}$ lying in the plane absolutely perpendicular to the plane of Γ are such that $\mathfrak{v} \cdot \Gamma = 0$.

This contains the fundamental property that by a rotation in S_4 either no point (except the origin) is left unchanged (general rotation) or an entire plane (the axis plane) is fixed (simple rotation)[1]).

§ 2. It may here be of some advantage to introduce the space complement[2]) of Γ. It is also a dyadic. Let the half space complement of Γ be designated by H. Then H is determined by (M. Bôcher: identical with) the matrix

$$\left\| \begin{array}{cccc} 0 & c_{34} & -c_{24} & c_{23} \\ -c_{34} & 0 & c_{14} & -c_{13} \\ c_{24} & -c_{14} & 0 & c_{12} \\ -c_{23} & c_{13} & -c_{12} & 0 \end{array} \right\| \tag{6}$$

---

[1]) See F. N. Cole: On Rotations in Space of four Dimensions (Am. Journ. of Math., 1890 p. 191).

[2]) The space complement of the *p-ad* $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_p$ in S_n is given by

$$\left| \begin{array}{l} \mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_2 \ldots \quad \ldots \mathfrak{e}_n \\ \cdot \quad \ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_2 \ldots\ldots \mathfrak{e}_n \\ a_{11}\,a_{12} \ldots . a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}\,a_{p2} \ldots . a_{pn} \end{array} \right|$$

If $p = 2$, it is designated by $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$. The space complement of a polyadic is equal to the sum of the space complements of its polyads (see On a Special Polyadic of Order $n - p$ etc. by Almar Næss, Vidsks. skr. I. Mat. Naturv. Klasse 1922. No 13. Oslo 1923).

Digitized by Google

That is, H is skew-symmetric, and planar if and only if Γ be so. In the latter case the planes of Γ and H are absolutely perpendicular to one another.

Now let $\mathfrak{v}$ by the transformation (1) be rotated into $\mathfrak{v}' = \mathfrak{v} + \mathfrak{v}\cdot\Gamma dt$. Then $\mathfrak{v}$ has been rotated through an angle $d\theta$, where

$$d\theta = \frac{|\mathfrak{v}\cdot\Gamma|}{|\mathfrak{v}|}\,dt. \tag{7}$$

By the space complement H this expression may be given a very short and comprehensive form. If the unit vector in the direction of $\mathfrak{v}$ is designated by $\mathfrak{u}$, we get after some calculation

$$d\theta = \sqrt{\sum_1^6 c_{ij}^2 - |\mathfrak{u}\cdot H|^2}\;dt. \tag{8}$$

We see that $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ is dependent on the direction of $\mathfrak{v}$ and less than $\sqrt{\sum_1^6 c_{ij}^2}$.

We also from (8) immediately see that if the rotation is simple ω is equal to $\sqrt{\Sigma c_{ij}^2}$ for any vector lying in the plane of Γ (the plane of rotation). In this case we may define $\sqrt{\sum_1^6 c_{ij}^2}$ as the angular velocity of the (simple) rotation determined by Γ.

We can prove that Σc_{ij}^2 is invariant under the group of orthogonal transformations. If Γ be planar it is always expressible in the form

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{a} & \mathfrak{b} \end{vmatrix} \tag{9}$$

$\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$ being two vectors. Then Γ determines a simple rotation whose plane of rotation is that through $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$ and whose angular velocity is equal to the area of the parallelogram on $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$. The sign of rotation is that from $\mathfrak{a}$ to $\mathfrak{b}$. The (half) space complement of Γ is expressible as a dyadic of the same form (9), determining the axis plane and the angular velocity.

Remark. As a property of the space complement which may be of interest in this connection, we may mention: Any unit vector $\mathfrak{u}$ is by Γ and H transformed into two vectors respectively, the scalar product of which is equal

Digitized by Google

to $-C$. If Γ (and accordingly H) be planar these two transformed vectors determine a right triangle the lenght of the hypotenuse of which is equal to $\sqrt{\sum_1^6 c_{ij}^2}$, independent of the direction of $\mathfrak{n}$.

§ 3. If there be given two distinct rotations in S_4, determined by two skew-symmetric dyadics (matrices), the resultant of the rotations is determined by the sum of these two dyadics (matrices).

But now we have the following propositions:

(A) The sum of two planar (skew-symmetric) dyadics is in general non-planar. It is planar only in the case when the two planes of the dyadics intersect in a line.

(B) If Γ be a planar skew-symmetric dyadic, any planar skew-symmetric dyadic Δ absolutely perpendicular to Γ must be of the form

$$\Delta = \lambda H$$

where λ is a scalar.

(C) If Γ and Δ shall be two planar skew-symmetric dyadics absolutely perpendicular to one another, it is always possible to find one and only one set Γ and Δ such that

$$\Gamma + \Delta$$

is equal to a given non-planar skew-symmetric dyadic.

But as a matter of fact, these propositions of the skew-symmetric dyadic involve well-known properties of the rotation in S_4, developed (for the finite case) in an entirely different way e. g. by F. N. Cole[1]), viz.:

The resultant of two simple rotations in S_4 is a simple rotation only in the case when the two planes of rotation are lying in an S_3 (i. e., intersect in a line) (A).

Any general rotation in S_4 can always and only in one way be expressed as the resultant of two simple ones their planes of rotation being absolutely perpendicular to one another (C).

Many other theorems of more special character may be derived in the same way.

Remark I. In literature we often find the term »scalar product of two dyadics« (or tensors of the second order). This quantity derived from Γ and Δ simply is

[1]) loc. cit.

Digitized by Google

(10) $$\frac{1}{2}\Gamma . \Delta = \sum_{i<j} c_{ij}\, d_{ij}$$

where : indicates the Gibbsian double dot product, and $\Delta = \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_j d_{ij}$. If Γ and Δ be planar, the vanishing of this quantity is the necessary and sufficient condition that the planes of Γ and Δ be simply perpendicular. From this we e. g. immediately deduce:

If ε_{ij} be an orthogonal matrix, we always have:

(11) $$\sum_{\substack{i,j \\ i<j}} (\varepsilon_{\alpha i}\, \varepsilon_{\beta j} - \varepsilon_{\alpha j}\, \varepsilon_{\beta i})\, (\varepsilon_{\gamma i}\, \varepsilon_{\delta j} - \varepsilon_{\gamma j}\, \varepsilon_{\delta i}) = 0$$

where $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are any three or four of the integers 1, 2, 3, 4 (i. e., the two pairs α, β and γ, δ may have one number in common, but not both).

Remark II. If Γ is non-planar, we can always determine two values of λ such that $\Gamma + \lambda H$ is planar. If Γ be planar then $\Gamma + \lambda H$ can never be so.

§ 4. As is well known, by a vector field $\mathfrak{v} = \sum_1^3 \mathfrak{e}_i v_i$ in S_3 is in each point defined a rotation, usually designated by another vector field, the curl of $\mathfrak{v}$, which in each point determines the axis of rotation and (twice) the angular velocity.

This rotation might, of course, according to what is done above, also be defined by a skew-symmetric three-dimensional dyadic field Γ. This dyadic is equal to half the space complement of the curl of $\mathfrak{v}$. If c_{ij} be the matrix of Γ, we get

(12) $$c_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right),\ i, j = 1, 2, 3.$$

It is always planar. We also have that the space complement of this dyadic is equal to the curl of $\mathfrak{v}$.

If $\mathfrak{v} = \sum_1^4 \mathfrak{e}_i v_i$ is a vector field in S_4 (v_i being, of course, scalar functions of position in spase, i. e., functions of the variables x_i, where x_i are interpreted as cartesian coordinates) we can show that the skew-symmetric dyadic Γ whose matrix is

(13) $$c_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right),\ i, j = 1, 2, 3, 4$$

Digitized by Google

in each point defines the rotation of the field [1]). Γ is non-planar, i. e., the rotation is general.

If we derive the space complement of this dyadic Γ we arrive at the following dyadic:

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{e}_1 & \mathfrak{e}_2 & \mathfrak{e}_3 & \mathfrak{e}_4 \\ \mathfrak{e}_1 & \mathfrak{e}_2 & \mathfrak{e}_3 & \mathfrak{e}_4 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix}$$

Hence this must be considered as the generalized curl of S_3 to S_4. As it is non-planar it determines in each point uniquely two planes which are absolutely perpendicular to one another, and two associated scalars. These are nothing but the axis planes and (twice) the angular velocities of two simple rotations whose resultant is the rotation of the field (in the point considered). That is, the generalized curl points out the axes of rotation and the angular velocities and thus has properties completely analogous to those of the ordinary curl in S_3.

Remark. In a previous paper [2]) the author has tried to show that the space complement of S_n is the generalized vector product of S_3. Now the curl of S_3 might (according to Gibbs) be considered as a special vector product. For

$$(15) \qquad \text{curl } \mathfrak{v} = \nabla \times \mathfrak{v} = \sum_1^3 \mathfrak{e}_i \times \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x_i}.$$

From a purely formal point of view the generalized curl of S_4 then must be

$$(16) \qquad \sum_1^4 \mathfrak{e}_i \times \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x_i}$$

where the cross here indicates the operation of forming the space complement. It may be of interest that also from this very different view-point we arrive at the same dyadic as above for the curl of $\mathfrak{v}$ in S_4. For developing (16) we get the determinant expression of (14).

---

[1]) This rotation must, of course, be defined geometrically, viz. by considering the transformation which four mutually perpendicular elements are subjected to by the vector field $\mathfrak{v}\,dt$, dt being an infinitesimal. This transformation contains an (average) rotation, independent of the orientation of the four elements and of the coordinate system chosen.

[2]) Almar Næss: On a Special Polyadic of Order $n-p$ etc.

Digitized by Google

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES

PAR

TRYGVE NAGELL

Les résultats généraux dans la théorie de la représentation d'un nombre entier (rationnel) par une forme binaire de degré > 2 sont jusqu'ici peu nombreux. Le plus important résultat est le théorème d'*Axel Thue*[1]:

Si $f(x, y)$ est une fonction rationelle entière homogène irréductible de x, y de degré > 2 à coefficients entiers rationnels, l'équation indéterminée

$$f(x, y) = c,$$

où c est un nombre entier rationnel, n'a qu'un nombre limité de solutions en nombres entiers x, y.

Malheureusement, la méthode de *Thue* ne donne aucun procédé pour déterminer toutes les solutions, s'il y en a.

Dans un cas très spécial *M. Boris Delaunay* a réussi à résoudre le problème complètement. En effet, il a démontré le théorème suivant[2]:

1° L'équation indéterminée

$$x^3 + Dy^3 = 1 \tag{1}$$

possède au plus une solution en nombres entiers x, y avec $y \neq 0$.

2° Si $x = x_1, y = y_1$ est une solution, le nombre

$$x_1 + y_1 \sqrt[3]{D}$$

est l'unité fondamentale de l'anneau $R\left[1, \sqrt[3]{D}, \left(\sqrt[3]{D}\right)^2\right]$ du corps cubique $K\left(\sqrt[3]{D}\right)$.

[1]) Journal f. Mathematik, Bd. 135, 1909.

[2]) Publications de la Société mathématique à Charkov, 1915.

Digitized by Google

Le problème de résoudre l'équation (1) revient évidemment au même que de déterminer dans le corps $K\left(\sqrt[3]{D}\right)$ toutes les unités de la forme $x + y\sqrt[3]{D}$, où x et y sont entiers; et la preuve de *M. Delaunay* démontre qu'il existe au plus une seule unité (positive, irrationelle) de cette forme.

Considérons maintenant l'équation plus générale:

$$Ax^3 + By^3 = C, \tag{2}$$

où C a une des valeurs 1 ou 3. Sans rien perdre de la généralité nous pouvons faire les suppositions suivantes: Les entiers A et B sont indivisibles par le cube d'un nombre premier et premiers entre eux; $A > B \geqq 1$. Lorsque $C = 3$, AB n'est divisible par 3. Lorsque les deux corps cubiques $K\left(\sqrt[3]{\frac{A}{B}}\right)$ et $K\left(\sqrt[3]{\frac{A_1}{B_1}}\right)$ sont identiques, je dis que les deux équations

$$Ax^3 + By^3 = C \text{ et } A_1x^3 + B_1y^3 = C_1$$

appartiennent à la même classe, à la classe du corps $K\left(\sqrt[3]{\frac{A}{B}}\right)$.

Cela posé, nous avons démontré le théorème suivant:

1° L'équation (2) possède au plus une seule solution en nombres entiers x, y, différents de zéro. Il y a l'unique exception pour l'équation $2x^3 + y^3 = 3$, qui posséde exactement deux solutions, savoir $x = y = 1$ et $x = 4$, $y = -5$.

2° Parmi toutes les équations de la même classe, il y en a au plus une seule qui ist possible en nombres entiers, sauf pour les classes des corps $K\left(\sqrt[3]{2}\right)$ et $K\left(\sqrt[3]{20}\right)$. Dans la classe du corps $K\left(\sqrt[3]{2}\right)$ il y a trois équations possibles, savoir:

$$2x^3 + y^3 = 1,\ 2x^3 + y^3 = 3 \text{ et } 4x^3 + y^3 = 3.$$

Dans la classe du corps $K\left(\sqrt[3]{20}\right)$ il y a deux équations possibles, savoir

$$20x^3 + y^3 = 1 \text{ et } 5x^3 + 2y^3 = 3.$$

Enfin, nous avons trouvé une méthode pour déterminer la solution de l'équation (2) dans tous les cas où elle est possible. La démonstration repose sur le fait suivant: Le problème de

Digitized by Google

résoudre l'équation (2) revient au même que de déterminer dans le corps $K\left(\sqrt[3]{\frac{A}{B}}\right)$ toutes les unités de la forme

$$\frac{1}{C}\left[x\sqrt[3]{A} + y\sqrt[3]{B}\right]^3.$$

Mes recherches sur ce sujet vont paraître dans le Journal de Mathématiques pures et appliquées, Paris.

Digitized by Google

Digitized by Google

ON INVESTIGATIONS INTO MORTALITY BASED SOLELY ON NUMBERS OF DEATHS

BY

REINH. PALMQVIST

The usual method for investigations into mortality is, as well known, to state the relation between the number of deaths at a certain age during a certain period and the number of persons of the same age exposed to risk during the period. As rather large experiences, embracing a sufficient number of data, are necessary in order to obtain a somewhat reliable result from an investigation into mortality, such an investigation becomes rather laborious. Especially the computation of the number of persons exposed to risk takes time, whereas the computation of deaths during the observed period requires a far lesser effort. Therefore attempts have been made at a rather early date to draw conclusions on the mortality solely from data of deaths, the earliest of these attempts having been made on sub-standard risks. Thus *Blaschke*[1]) and *Jens Pedersen*[2]) have both given hypothetical mortality tables for certain groups of substandard risks on the basis of certain hypotheses and examination of statistics of causes of deaths.

Another investigation into the mortality of certain groups of sub-standard risks has been made some years ago by the Swedish Life Insurance Companies[3]).

This investigation, solely based on data of deaths, may be held

---

[1]) Denkschrift zur Lösung des Problems der Versicherung minderwertiger Leben. Wien 1895.

[2]) Uber die Versicherung minderwertiger Leben. Jena 1906.

[3]) Undersökning av dödligheten bland tuberkulöst belastade och med vissa andra sjukdomsanlag behäftade försäkrade. Stockholm 1921.

Digitized by Google

ultimately to centre on this characteristic of sub-standard lives, made by *Pedersen:*

»Within every group of sub-standard lives, characterized by a decided disposition for a certain disease, the increase of the force of mortality is limited to decided causes of death or to decided categories of causes of death, whereas the force of mortality of every other disease is the same as for standard lives.«

Thus, if we have a group of lives, characterized by a decided disposition for a certain disease, and $\sigma_x^{(r)}$ is for a person of x years the probability of death from a disease to which there has been a predisposition, whereas $\sigma_x^{(i)}$ is the probability of death from another disease and $s_x^{(r)}$ and $s_x^{(i)}$ express the probabilities for a standard life, we get

(1) $$\sigma_x^{(r)} > s_x^{(r)}$$

but

(2) $$\sigma_x^{(i)} = s_x^{(i)}.$$

Provided that this hypothesis is correct, the relation between the probability of death ϱ_x for a person of x years, belonging to the sub-standard class of lives, and the probability of death for a standard life q_x of x years may be got as follows.

We express the number of deceased during a year under observation, within the interval of age x to $x+1$, from the class of sub-standard lives that we examine by δ_x and the number of those from this class, dead from a disease to which they have not been prediposed, by $\delta_x^{(i)}$. Further, we express by d_x and $d_x^{(i)}$, for the same year, the number of deceased from among the normal lives and the resp. number of these who have died from diseases without relationship to the disposition for diseases which we examine. Assuming that λ_x expresses the number of lives at x years, belonging to the sub-standard class at the beginning of the observed year and l_x the corresponding number of the normal lives, we get the following equations

(3) $$\begin{cases} \varrho_x = \dfrac{\delta_x}{\lambda_x}, \quad q_x = \dfrac{d_x}{l_x}, \\ \sigma_x^{(i)} = \dfrac{\delta_x^{(i)}}{\lambda_x}, \quad s_x^{(i)} = \dfrac{d_x^{(i)}}{l_x}. \end{cases}$$

But in consequence of (2) we get

Digitized by Google

(4) $$\frac{\delta_x^{(i)}}{\lambda_x} = \frac{d_x^{(i)}}{l_x},$$

and we obtain thus

(5) $$\frac{\varrho_x}{q_x} = \frac{\delta_x}{d_x} \cdot \frac{d_x^{(i)}}{\delta_x^{(i)}},$$

which formula gives us the desired relationship between the rates of mortality. By this method, consequently, we do not obtain directly the mortality of the class of sub-standard lives, but only the relationship between this mortality and the mortality of standard lives. But it is the surplus-mortality in reference to the normal mortality, we must know in order to get a basis for the necessary increase of premiums.

It appears from the indicated method that only data on the deceased are necessary for calculation of the surplus-mortality of a group of sub-standard lives, but these data must give not only the causes of death but also the state of health, when the policies were granted.

This method is based on the hypothesis, already mentioned, that the mortality in certain diseases is higher for the sub-standard lives than for the normal ones, but that, in other cases, the rates of mortality are identical. By studying the statistics of causes of death, we arrive at the confirmation of this hypothesis as, at least approximatively, correct.

Dispositions for diseases constituting the class of sub-standard lives may be more than one. As, however, the examined experience would be too much divided if groups were formed with reference to all sorts of combined dispositions for diseases, I have assumed that the surplus-mortality in one group, characterized by several dispositions for diseases, is equal to the total of surplus-mortality of those groups which are characterized, each by one special disposition for disease. And I have been able to prove the correctness of this thesis, taking for granted certain simplifying assumptions on the connection between dispositions for disease and causes of death. On this subject, *H. Braun* has published a minute investigation in the 4th number for 1924 of »Zeitschrift für die gesamte Versicherungs Wissenschaft«[1]).

[1]) Uber die mittelbare Abhängigkeit von Risikomerkmalen.

Digitized by Google

There is nevertheless a disadvantage to this method. The result obtained is markedly ungraduated. This is quite natural as the surplus-mortality is obtained as a function from four variables, each presenting rather considerable oscillations. It is therefore necessary to bring together the experiences in pretty large groups, with regard to ages and duration of policies. And, in order to get a result that is usable, rather large experiences are required.

Analogical methods can also be used for investigation into the mortality of standard lives. By way of example, as I have shown in an article in »Skandinavisk Aktuarietidskrift«[1]), we can, by using a formula analogical to the above mentioned, examine the influence of selection on mortality. Let $q_{[x-t]+t}$ express the probability of death for a person of x years, t years passed since the entry, and let q_x express the probability of death for a person of the same age, who has been insured such a long time that the selection has no weight any longer, this, to be supposed, after ten years duration of the policies. By the same method as above, we can then arrive at the formula

$$\frac{q_{[x-t]+t}}{q_x} = \frac{d_{[x-t]+t}}{d_x} \cdot \frac{d_x^{(i)}}{d_{[x-t]+t}^{(i)}}, \tag{6}$$

if by $d_{[x-t]+t}$ and d_x are denoted the total number of deaths during the $(t+1)$st year of insurance, resp. after 10 years at least from the entry, whereas $d_{[x-t]+t}^{(i)}$ and $d_x^{(i)}$ denote the corresponding number of deaths from causes, not influenced by the selection.

The necessary condition for the appropriateness of the method is the possibility of defining some causes of death on which the selection has no influence. It is evident that this is the case with accidents, but, in all probability, we may assume that the mortality-rate of several acute diseases can not be very much influenced by the space of time, longer or shorter since the policies were granted.

Neither of these two investigations, here accounted, gives

---

1) Some Remarks on the Effect of Selection upon Mortality with regard to different Causes of Death. Skand. Akt.tidskrift 1922.

Digitized by Google

directly the inquired mortality which we obtain only in relation to another mortality, assumed to be known. I now proceed to the attempts, made by *Arne Fisher*, directly to construct a mortality-table on the basis of data of deaths, classified according to ages and causes of death[1]).

Fisher assumes that the causes of death can be divided into a limited number of groups — generally eight —, the deaths of each group, referring to the original number of survivors in the mortality table, distributed around a certain age according to a frequency function of *Charlier*'s type.

The metod adopted for his investigations is, a prioro, to fix the frequency functions for the distribution per cent of the deaths within each of the eight groups, i. e. he assumes the characteristics of the frequency functions — meam, dispersion, skewness and excess — to be taken for granted.

Let

$$F_1(x),\ F_2(x),\ldots F_8(x)$$

be these functions of distribution, further, let N be the number of lives at the minimum age of the mortality table, of which N_r are assumed to die in diseases, belonging to the group $r (r = 1, 2, \ldots 8)$, thus

$$N = N_1 + N_2 + \ldots + N_8. \tag{7}$$

If d_x as usual denotes the number of deaths between x and $x+1$ years of the original N lives, we get

$$d_x = N_1 \int_x^{x+1} F_1(x)\,dx + N_2 \int_x^{x+1} F_2(x)\,dx + \ldots + N_8 \int_x^{x+1} F_8(x)\,dx. \tag{8}$$

$N_1, N_2, \ldots N_8$ are here unknown and we only know that their sum is equal to N. We are however able to form the quotient

$$R_\nu(x) = \frac{N_\nu \int_x^{x+1} F_\nu(x)\,dx}{N_1 \int_x^{x+1} F_1(x)\,dx + N_2 \int_x^{x+1} F_2(x)\,dx + \ldots + N_8 \int_x^{x+1} F_8(x)\,dx} \quad (\nu = 1,2,..8) \tag{9}$$

[1]) An Elementary Treatise on Frequency Curves. New York 1922.

Digitized by Google

which simply indicates the number of deaths between x and $x+1$ years belonging to the group ν in relation to the total of deaths within the same interval of age. These quotients, thus, can always be derived from the observed experiences and we obtain for each group as many equations as we have ages, or groups of ages if the experiences are too small for division into groups of one year. From these equations then, the quantities $N_1, N_2, \ldots N_s$ can be computed, for example by using the method of least squares and thus, also the quantities d_x in the mortality table.

Fisher does not mention how he determines the frequency functions $F_\nu(x)$ but presumedly they are fixed through experiments and the frequency functions which he has found appropriate to one mortality table also seem adaptable to others. Often however, the frequency functions must be somewhat varied from one mortality table to another.

The mortality tables which *Fisher* has produced by this method correspond most strikingly with those computed in the usual way.

As already mentioned, *Fisher* assumes that we are able to bring together all causes of death into eight groups, the deaths of each group following a definite law of distribution. It seems to me, however, to be sufficient to divide the causes of death into *two* groups, one with the deaths distributed around a certain age according to a frequency function, a priori fixed, the other group embracing all other causes of death for which such a supposition is not needed. Let, namely, $F(x)$ be the frequency function for the first group and let $R(x)$ be the quotient between the number of deaths within the second group and the total number of deaths within the interval of age x to $x+1$ years. Then is

$$d_x = N_1 \frac{1}{1-R(x)} \int_x^{x+1} F(x)\,dx \tag{10}$$

and we get for fixing N_1 the equation

$$N = N_1 \sum_{x+\alpha}^{\omega} \frac{1}{1-R(x)} \int_x^{x+1} F(x)\,dx \tag{11}$$

if α is the lowest and ω the highest age in the mortality table.

Digitized by Google

Modified in this way, *Fisher*'s method has a certain analogy to the methods which I have previously described, as the mortality in a certain group of diseases is assumed to some extent to be known while the mortality from other diseases and, consequently, the total mortality is obtained in relation to the first-mentioned mortality. I have not, however, had the opportunity to test practically the method, modified in this way, and therefore I can not say if it is of interest from other points of view than the theoretical.

Meanwhile, the study of *Fisher*'s method has suggested to me the idea that it might be possible to construct a mortality table solely from dates of deaths, if, instead of making assumptions on the distribution of deaths within groups according to causes of death, we simply take for granted that the curve of probability of death follows an analytical expression containing certain arbitrary constants — a supposition in any case to be made when we are to graduate by an analythical method the rate of deaths obtained in the usual way. This seems to me possible if we deal with data of deaths of insured persons and these data are distributed, not only according to the ages of the deceased but also according to the duration of the policies.

Let us make the same assumption on which I have based my above described investigation into the influence of selection on the mortality of insured persons, namely the distribution of the causes of death on two groups, one embracing causes of death not influenced by the selection. Then we obtain, if we substitute in the equation (6) the analytical expressions for $q_{[\infty-t]+t}$ and q_{∞}, a system of equations with as many equations as there are combinations of ages and durations of policies during the time of selection but only a limited number of unknown quantities, namely the arbitrary constants, included in the analytical expression for probabilities of death. These constants can thus be defined for example by the method of least squares or the method of moments. But the mortality thus obtained contains generally an arbitrary factor. In this case one more equation is required for the definition of this factor, and such an equation we obtain if, for instance, we know the total number of persons exposed to risk for all ages and durations, a quantity that we generally obtain without difficulty. I have not however had the oppor-

Digitized by Google

tunity practically to test this method. But I believe it to be as practicable as *Fisher*'s and, surely, this method will not imply more complicated calculations than an analytical graduation of probabilities of death, obtained in the usual way.

Digitized by Google

ON THE MATHEMATICAL FOUNDATIONS OF ACTUARIAL SCIENCE

BY

J. F. STEFFENSEN

1. To introduce more rigour into the branch of applied mathematics called Actuarial Science is from one point of view a comparatively easy matter, from another a somewhat difficult task. On one side, many of the defects are obvious and the remedy at hand; on the other, the practical actuary takes little interest in what from a business point of view may appear to be superfluous scientific refinement. No company has yet had to wind up, because its actuary took no account of questions of convergence or remainder-terms! All, the practical man wants, is an easy tool; and if he has any misgivings at all concerning its proper use, he will rather trust to experience and instinct for avoiding possible pitfalls, than worry about the reservations and conditions without which a theorem is, after all, not a true theorem.

Yet the question has another side which should also be of interest to the practical actuary. It is a wholesome feature of the mathematical sciences that they must sooner or later come to a standstill, if the foundations on which they rest are not securely laid. Many important and also practically useful theorems have to remain undiscovered, while some of the theorems we believe to possess are not established in such a way that they can serve as starting points for further investigations. The history of science shows repeatedly that after an easy-going period it becomes urgently necessary to pay more attention to rigour; and efforts in this direction are usually repaid by unexpected progress.

I shall not, on this occasion, attempt to cover the whole sub-

Digitized by Google

ject, but shall only deal with one or two postulates and a few formulas which are fundamental for actuarial science.

2. We assume, for a homogeneous group of individuals of the same age x and living under the same conditions, the existence of such a function μ_x, continuous for all $x > 0$, that $\mu_x dx$ denotes the probability for a life aged x of dying between the ages x and $x + dx$. The existence of this function, the *force of mortality*, is a postulate; but it is supported by the evidence of experience. For the causes of death are either constant for all ages (many forms of accidents), or else connected with the way in which the organism develops and finally wears out, and this process is of a continuous nature.

In the following we constantly have in view a group of persons of the same age who are subject to the same risk, varying continuously with the age. It is then clear that there exists a positive constant ε, independent of x, such that

$$\mu_x \geq \varepsilon > 0 \qquad (x \geq 0); \tag{1}$$

for a lower, from 0 different, limit for μ_x can at least be found by considering the probability of dying by accident.

Now let there be l_x persons alive at age x. The mathematical expectation of deaths amongst these persons between ages x and $x + dx$ is $l_x \mu_x dx$. The expected number of living at the end of the interval dx is, therefore,

$$l_{x+dx} = l_x - l_x \mu_x dx$$

whence

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx} = -D \operatorname{Log} l_x. \tag{2}$$

From (2) we obtain by integration

$$\operatorname{Col} \frac{l_{x+t}}{l_x} = \int_x^{x+t} \mu_x dx \tag{3}$$

whence for the probability of surviving t years

$${}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = e^{-\int_x^{x+t} \mu_x dx}. \tag{4}$$

In particular we have, for $t = 1$,

$$\operatorname{Col} p_x = \int_x^{x+1} \mu_x dx, \tag{5}$$

Digitized by Google

$$p_x = e^{-\int_x^{x+1} \mu_x dx}. \tag{6}$$

If, in (3) and (4), we put $x = \alpha$ and, thereafter, $t = x - \alpha$, we find

$$\operatorname{Log} l_x = \operatorname{Log} l_\alpha - \int_\alpha^x \mu_x dx, \tag{7}$$

$$l_x = l_\alpha e^{-\int_\alpha^x \mu_x dx}. \tag{8}$$

The probabilities of dying within t, resp. 1 year, are ${}_tq_x = 1 - {}_tp_x$, resp $q_x = 1 - p_x$.

3. From these well-known formulas certain general conclusions may be drawn concerning the nature of the biometrical functions. It is seen, by (1), from (4) and (8) in which latter equation l_α is an arbitrary constant, that ${}_tp_x$ for continuously increasing t, and l_x for continuously increasing x, decrease monotonously to 0 without attaining this value for any finite value of the variable. From (8) we obtain by (1)

$$l_x \leq l_\alpha e^{-(x-\alpha)\varepsilon} \qquad (x > \alpha) \tag{9}$$

from which it appears, for instance, that all the moments

$$\int_\alpha^\infty x^r l_x dx$$

and repeated integrals

$$\int_\alpha^\infty \int_x^\infty \dots \int_\infty^\infty l_x dx^r$$

are necessarily convergent.

The interesting question, whether $\mu_x \to \infty$ as $x \to \infty$, cannot be decided by the formulas. We obtain from (6), by the theorem of mean value,

$$q_x = 1 - e^{-\mu_\xi} \qquad (x < \xi < x + 1). \tag{10}$$

From this relation follows that $\mu_x \to \infty$ as $q_x \to 1$ and *vice versa*. But whether $q_x \to 1$ as $x \to \infty$ is a matter of experience, and therefore cannot be decided. All that can be said is that this assumption, if desired, can be made without contradiction.

From (5) we obtain, *if* μ_x *does not decrease* in the interval from x to $x + 1$, the inequality

Digitized by Google

$$\mu_x \leq \text{Col}\, p_x \leq \mu_{x+1}. \tag{11}$$

Now we have

$$\text{Col}\, p_x = -\text{Log}(1-q_x) = q_x + \frac{1}{2}q_x^2 + \frac{1}{3}q_x^3 + \ldots,$$

so that, by (11),

$$q_x < \mu_{x+1}, \tag{2}$$

provided that μ_x does not decrease in the interval from x to $x+1$. As q_x and μ_x do not differ greatly for the ages which are of practical importance, this simple inequality is often useful.

4. We will stop for a moment and consider what the text-books say about the function l_x. I have examined seven leading text-books and found that they all agree on the following points[1]):

An »oldest age« ω exists, such that $l_x > 0$ for $x < \omega$, and $l_x = 0$ for $x \geq \omega$. Therefore ${}_tp_x = 0$ for $x + t \geq \omega$, and

$$\int_x^\infty l_x\, dx = \int_x^\omega l_x\, dx.$$

In cases where an analytical expression is assumed for l_x, it is assumed without examination that $\int_\omega^\infty$ is so small that it may safely be neglected.

But this point of view leads to meaningless results. Assuming that ω is the upper limit of the age which any life can attain, we admit that it is possible that a person may be alive at the age $\omega - \eta$ where η is a very small quantity, say 1 second. On the other hand, no person can, according to hypothesis, be alive at the age ω, or 1 second later. Does anybody seriously believe that there is an age ω with this marvellous peculiarity?

A fallacy of this nature ought not to be tolerated in any text-book. It has arisen from the consideration that a finite number of people must certainly die out in the course of a finite time; and it has been overlooked that the larger the group is taken, the more it probably contains of individuals with an extraordinary vitality who are likely to defy previous experience.

5. We proceed to another important biometrical function, the

---

[1]) I can, if desired, support this statement with plenty of quotations. The text-books alluded to are those of *King*, *Spurgeon*, *Landré*, *Broggi*, *Czuber*, *Loewy* and *Jörgensen*.

Digitized by Google

expectation of life $\bar{e}_x$, defined by

$$\bar{e}_x = \int_0^\infty {}_tP_x\, dt = \frac{1}{l_x}\int_x^\infty l_x\, dx. \tag{13}$$

We find by (4)

$$\bar{e}_x = \int_0^\infty e^{-\int_x^{x+t} \mu_x dx}\, dt. \tag{14}$$

Inserting the lower limit of μ_x by (1), we obtain

$$\bar{e}_x \leq \frac{1}{\varepsilon}, \tag{15}$$

that is, there exists a boundary, independent of x, which $\bar{e}_x$ cannot exceed. This result may be trivial; but if it is further known that μ_x for $x \geq x_0$ *never decreases,* we find by (14) for all $x \geq x_0$

$$\bar{e}_x \leq \int_0^\infty e^{-t\mu_x}\, dt.$$

or

$$\bar{e}_x \leq \frac{1}{\mu_x}, \tag{16}$$

whence by (12), if $x - 1 \geq x_0$,

$$\bar{e}_x \leq \frac{1}{q_{x-1}}. \tag{17}$$

These formulas have important applications.

It can be shewn that the question whether $\bar{e}_x \to 0$ as $x \to \infty$, is identical with the question whether $\mu_x \to \infty$ as $x \to \infty$; I omit the simple proof.

6. So far it has only been assumed that μ_x is a continuous function, but not that it can be differentiated. But in order to justify the application of the formulas of the theory of interpolation to a life-table, it is necessary that the biometrical functions possess a derivative of a certain order. This is obtained by an analytical graduation of the table. But if the graduation is performed by graphical or mechanical methods, the application of interpolation-formulas is mainly of a conventional character, as little or nothing can be said about the »accuracy« of the result, although interpolation under such circumstances may be recommended as a means of avoiding inconsistencies in the use of the table.

Digitized by Google

In what follows we shall assume that the table has been graduated by an analytical formula. Particular attention will be paid to *Makeham's formula*

$$\left.\begin{aligned} \mu_x &= A + Bc^x \\ &= A + Be^{\gamma x} \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

where the constants A, B and γ are all assumed to be positive. This formula is known to fit, as regards the adult ages, most tables used for life-insurance purposes, with an accuracy sufficient for practical applications.

In many of the remainder-terms the derivatives of l_x occur. By successive differentiations of $l'_x = -\mu_x l_x$, eliminating, after each differentiation, l'_x by this same relation, we find

$$\left.\begin{aligned} l'_x &= -\mu_x l_x \\ l''_x &= (\mu_x^2 - \mu'_x)\, l_x \\ l'''_x &= -(\mu_x^3 - 3\mu_x\mu'_x + \mu''_x)\, l_x \\ l''''_x &= (\mu_x^4 - 6\mu_x^2\mu'_x + 4\mu_x\mu''_x + 3\mu'^2_x - \mu'''_x)\, l_x \\ l'''''_x &= -(\mu_x^5 - 10\mu_x^3\mu'_x + 10\mu_x^2\mu''_x + 15\mu_x\mu'^2_x - 5\mu_x\mu'''_x \\ &\quad - 10\mu'_x\mu''_x + \mu''''_x)\, l_x . \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

In the case of *Makeham's* formula we obtain from (18)

$$\mu^{(r)}_x = B\gamma^r e^{\gamma x} \qquad (r > 0)$$

or

$$\mu^{(r)}_x = \gamma^r(\mu_x - A) \qquad (r > 0). \quad (20)$$

By this formula the differential coefficients of μ_x may be eliminated from (19), and it is seen that $\frac{l_x^{(n)}}{l_x}$ when *Makeham's* formula holds is a polynomial in μ_x. We find

$$\left.\begin{aligned} l'_x &= -\mu_x l_x \\ l''_x &= (\mu_x^2 - \gamma\mu_x + \gamma A)\, l_x \\ l'''_x &= -[\mu_x^3 - 3\gamma\mu_x^2 + \gamma(\gamma + 3A)\mu_x - \gamma^2 A]\, l_x \\ l''''_x &= [\mu_x^4 - 6\gamma\mu_x^3 + \gamma(7\gamma + 6A)\mu_x^2 - \gamma^2(\gamma + 10A)\mu_x \\ &\quad + \gamma^2 A(\gamma + 3A)]\, l_x \\ l'''''_x &= -[\mu_x^5 - 10\gamma\mu_x^4 + 5\gamma(5\gamma + 2A)\mu_x^3 - 5\gamma^2(3\gamma + 8A)\mu_x^2 \\ &\quad + (\gamma^2\gamma^2 + 25\gamma A + 15A^2)\mu_x - \gamma^3 A(\gamma + 10A)]\, l_x . \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

In certain cases the remainder-term depends on the derivatives of Log l_x which is more convenient where *Makeham's* formula is concerned. We find, by (2) and (18),

Digitized by Google

$$D^r \operatorname{Log} l_x = -\mu_x^{(r-1)} = -\gamma^{r-1}(\mu_x - A) \qquad (r > 1). \quad (22)$$

7. Let us now consider a few simple approximations. In the theory of interpolation the following formula is demonstrated[1])

$$D = \Box\delta - \frac{1}{6}\Box\delta^3 + \frac{1}{30}\Box\delta^5 - \frac{1}{140}\Box\delta^7 + \ldots; \quad (23)$$

the coefficients in this expansion are also coefficients in the remainder-term. If we stop at the first term, we have

$$f'(x) = \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2} - \frac{1}{6} f^{(3)}(\xi) \quad (24)$$

and, stopping at the second term,

$$f'(x) = \frac{8[f(x+1) - f(x-1)] - [f(x+2) - f(x-2)]}{12} + \frac{1}{30} f^{(5)}(\xi), \quad (25)$$

ξ being some point in the range.

Putting $f(x) = \operatorname{Log} l_x$ we obtain from (24)

$$\mu_x = \frac{\log l_{x-1} - \log l_{x+1}}{2 \log e} + \frac{1}{6} D^3 \operatorname{Log} l_\xi \quad (26)$$

and from (25)

$$\mu_x = \frac{8(\log l_{x-1} - \log l_{x+1}) - (\log l_{x-2} - \log l_{x+2})}{12 \log e} - \frac{1}{30} D^5 \operatorname{Log} l_\xi. \quad (27)$$

If we put $f(x) = l_x$, we have the more familiar formulas

$$\mu_x = \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2 l_x} + \frac{l^{(3)}_\xi}{6 l_x} \quad (28)$$

and

$$\mu_x = \frac{8(l_{x-1} - l_{x+1}) - (l_{x-2} - l_{x+2})}{12 l_x} - \frac{l^{(5)}_\xi}{30 l_x}. \quad (29)$$

In the case of *Makeham's* formula the remainder-terms are easily calculated by (22) and (21); but the question is not of much interest, as the direct calculation of μ_x by *Makeham's* formula is an easy matter.

A more important formula is the approximate relation connecting μ_x and q_x. From I. L. § 7 (9), or

---

[1]) *Steffensen:* Interpolationslære § 7 (8). [This work is quoted below as »I. L.«].

Digitized by Google

$$D = \delta - \frac{1}{24}\delta^3 + \frac{3}{640}\delta^5 - \frac{5}{7168}\delta^7 + \ldots \tag{30}$$

where the coefficients are also coefficients in the remainder-term, we obtain, putting $f(x) = \text{Log } l_{x+\frac{1}{2}}$ and stopping at the first term

$$\mu_{x+\frac{1}{2}} = \text{Col } p_x + \frac{1}{24} D^3 \text{ Log } l_\xi. \tag{31}$$

In the case of *Makeham's* formula this becomes

$$\mu_{x+\frac{1}{2}} = \text{Col } p_x - \frac{\gamma^2}{24}(\mu_\xi - A) \tag{32}$$

which shows that the formula is rather accurate, ξ being situated between x and $x+1$.

The function $L_x = \int_x^{x+1} l_x dx$ is approximated by the simplest of the formulas of mechanical quadrature of the closed type (I. L. p. 163), or

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \frac{1}{12} f''(\xi). \tag{33}$$

We therefore have

$$L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2} - \frac{l''_\xi}{12}. \tag{34}$$

By means of this formula we may, putting $d_x = l_x - l_{x+1}$, approximate the *central death-rate* m_x, thus

$$\frac{1}{m_x} = \frac{L_x}{d_x} = \frac{l_x + l_{x+1}}{2d_x} - \frac{l''_\xi}{12\,d_x}$$

$$= \frac{2l_x - d_x}{2d_x} - \frac{l''_\xi}{12\,d_x}$$

or

$$\frac{1}{m_x} = \frac{1}{q_x} - \frac{1}{2} - \frac{l''_\xi}{12\,d_x}. \tag{35}$$

From $l_{x+1} < L_x < l_x$ it follows that

$$q_x < m_x < \frac{q_x}{p_x}. \tag{36}$$

The error committed in putting $m_x = \mu_{x+\frac{1}{2}}$ may be estimated

Digitized by Google

as follows. We have $m_x L_x = d_x$ or

$$m_x \int_0^1 l_{x+t}\, dt = -\int_0^1 l'_{x+t}\, dt$$

or

$$\int_0^1 (m_x l_{x+t} + l'_{x+t})\, dt = 0. \tag{37}$$

By I. L. § 16 (15), or

$$\int_0^1 f(t)\, dt = f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24} f''(\xi) \tag{38}$$

we obtain from (37)

$$m_x l_{x+\frac{1}{2}} + l'_{x+\frac{1}{2}} + \frac{1}{24}(m_x l''_\xi + l'''_\xi) = 0$$

whence, remembering that $l'_{x+\frac{1}{2}} = -\mu_{x+\frac{1}{2}} l_{x+\frac{1}{2}}$ and dividing by $l_{x+\frac{1}{2}}$,

$$m_x = \mu_{x+\frac{1}{2}} - \frac{l'''_\xi + m_x l''_\xi}{24\, l_{x+\frac{1}{2}}}. \tag{39}$$

8. Questions of a more delicate nature arise in investigating the relation between the expectation of life $\overline{e}_x$ as defined by (13), and the *curtate expectation of life* e_x defined by

$$e_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_t p_x = \frac{1}{l_x} \sum_{t=1}^{\infty} l_{x+t}. \tag{40}$$

The mathematical instrument required for this purpose is *Euler's* summation-formula in the form obtained from I. L. § 14 (9)—(10) by letting $k \to \infty$:

$$\int_0^\infty f(t)\, dt = \sum_0^\infty f(s) - \frac{1}{2} f(0) + \sum_{\nu=1}^{r-1} \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} f^{(2\nu-1)}(0) + R, \tag{41}$$

$$R = \int_0^\infty \frac{\Delta_t \overline{B}_{2r}(0)}{(2r)!} f^{(2r)}(t)\, dt. \tag{42}$$

In this formula it is assumed:

1°. that $\int_0^\infty f(t)\, dt$ and $\sum_0^\infty f(s)$ are convergent;

2°. that $f^{(2\nu-1)}(k) \to 0$ as $k \to \infty$ $(\nu = 1, 2, \ldots, r-1$.

The convergence of the remainder-term follows from these conditions of which 1° is always satisfied by applications to l_x,

Digitized by Google

and the condition 2^0 as a rule by analytically graduated tables, in particular in the case of *Makeham's* formula.

If also $\int_0^\infty |f^{(2r)}(t)|dt$ is convergent, as in the case of *Makeham's* formula, the remainder-term may be simplified. In that case

$$|R| \leq \int_0^\infty \frac{|\Delta_t \bar{B}_{2r}(0)|}{(2r)!} |f^{(2r)}(t)|\, dt;$$

but the numerically largest value which $\Delta_t \bar{B}_{2r}(0)$ can reach is[1]) $(2^{1-2r} - 2)B_{2r}$, so that

$$|R| \leq (2 - 2^{1-2r}) \frac{|B_{2r}|}{(2r)!} \int_0^\infty |f^{(2r)}(t)|\, dt. \tag{43}$$

Although this formula does not produce the best possible limits for the error, the result is in many cases quite accurate enough for practical purposes.

If we take $r = 2$ and put $f(t) = l_{x+t}$, we obtain from (41) and (43)

$$\int_0^\infty l_{x+t}\, dt = \sum_{t=1}^{\infty} l_{x+t} + \frac{1}{2} l_x + \frac{1}{12} l'_x + R,$$

$$|R| \leq \frac{1}{384} \int_x^\infty |l''''_x|\, dx,$$

and hence, dividing by l_x,

$$\left.\begin{aligned} \mathring{e}_x &= e_x + \frac{1}{2} - \frac{\mu_x}{12} + R, \\ |R| &\leq \frac{1}{384\, l_x} \int_x^\infty |l''''_x|\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

9. In practice the table of l_x is, of course, only continued as far as a certain age ω, generally about 100 years. The question arises what error we commit in calculating integrals and sums to the limit ω instead of to infinity. Let us first consider the approximate relation

$$\int_x^\infty l_x\, dx = \int_x^\omega l_x\, dx. \tag{45}$$

The error implied in this relation equals $\int_\omega^\infty l_x\, dx$ and can often

[1]) I. L. § 13 (20).

Digitized by Google

be estimated when l_x is an analytical function. Even if this is not the case, a limit can be found if it is known that μ_x does not decrease for $x > \omega$, as in that case, by (16),

$$\int_{\omega}^{\infty} l_x \, dx \leq \frac{l_\omega}{\mu_\omega}. \tag{46}$$

The practically interesting question is how many decimals in $\bar{e}_x$ can be relied upon, if the assumption (45) is made. A numerical example will make the point clear. In the $O^{M(5)}$ table[1]) we have $\omega = 102$. Therefore, according to (46),

$$\int_{102}^{\infty} l_x \, dx \leq \frac{l_{102}}{\mu_{102}} < \frac{1{\cdot}06}{{\cdot}992} < 1{\cdot}07.$$

If now, in calculating $\bar{e}_x$ by the approximate formula

$$\bar{e}_x = \frac{1}{l_x} \int_{x}^{102} l_x \, dx,$$

we require 3 reliable decimals in the result, we must have

$$\frac{1}{l_x} \int_{102}^{\infty} l_x \, dx \leq {\cdot}0005$$

which inequality is satisfied provided only $\frac{1{\cdot}07}{l_x} \leq {\cdot}0005$ or $l_x \geq 2140$. The table of l_x shows by inspection that the latter inequality is satisfied for $x < 90$. At least for all ages below 90 we, therefore, can rely on 3 decimals in $\bar{e}_x$, calculated by the approximative formula.

The error committed in calculating e_x by summation to ω instead of to ∞ can be estimated in a similar way. Instead of (16) we use the inequality, valid for non-increasing p_x,

$$e_x \leq \frac{p_x}{q_x}, \tag{47}$$

obtained as follows:

$$\begin{aligned} e_x &= p_x + p_x p_{x+1} + p_x p_{x+1} p_{x+2} + \cdots \\ &\leq p_x + p_x^2 + p_x^3 + \cdots \qquad = \frac{p_x}{q_x}. \end{aligned}$$

[1]) As, in this table, l_x is, unfortunately, only stated in integers ($l_{100} = 7$, $l_{101} = 3$, $l_{102} = 1$), it has been necessary to re-calculate l_{102} by *Makeham's* formula.

Digitized by Google

The results are similar to those obtained for $\bar{e}_x$; we need not go into details.

10. In dealing with remainder-terms, depending on $\int_x^\infty |l_x^{(n)}|\,dx$, a few supplementary explanations are necessary. We confine ourselves to the case of *Makeham's* formula and begin by showing how expressions of the form

$$y_n = \int_x^\infty \mu_x{}^n\, l_x\, dx \tag{48}$$

can be successively calculated. As by *Makeham's* formula

$$l_x = k e^{-Ax - \frac{B}{\gamma} e^{\gamma x}}, \tag{49}$$

the convergence of (48) is secured.

We write (48) in the form

$$y_n = -\int_x^\infty \mu_x{}^{n-1}\, l'_x\, dx$$

and find by partial integration

$$y_n = \mu_x{}^{n-1}\, l_x + \int_x^\infty (n-1)\, \mu_x{}^{n-2} \mu'_x\, l_x\, dx$$
$$= \mu_x{}^{n-1}\, l_x + (n-1)\,\gamma \int_x^\infty \mu_x{}^{n-2}(\mu_x - A)\, l_x\, dx$$

or

$$y_n = \mu_x{}^{n-1}\, l_x + (n-1)\,\gamma\, y_{n-1} - (n-1)\,\gamma\, A\, y_{n-2}. \tag{50}$$

It is seen that y_n can be calculated by y_{n-1} and y_{n-2}. As initial values we have

$$y_0 = \int_x^\infty l_x\, dx \equiv T_x,$$
$$y_1 = \int_x^\infty \mu_x\, l_x\, dx = l_x.$$

The values of y_n as far as y_4 are

$$\left.\begin{aligned}
y_0 &= T_x \\
y_1 &= l_x \\
y_2 &= (\mu_x + \gamma)\, l_x - \gamma A\, T_x \\
y_3 &= [\mu_x{}^2 + 2\gamma\mu_x + 2\gamma(\gamma - A)]\, l_x - 2\gamma^2 A\, T_x \\
y_4 &= [\mu_x{}^3 + 3\gamma\mu_x{}^2 + 3\gamma(2\gamma - A)\,\mu_x \\
&\quad + 3\gamma^2(2\gamma - 3A)]\, l_x - 3\gamma^2 A(2\gamma - A)\, T_x.
\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Digitized by Google

The expressions y_n being known, a higher limit for $\int_x^\infty |l^{(n)}{}_x|\,dx$ is found from (21) by taking all the coefficients with the sign +, thus:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_x^\infty |l''_x|\,dx < y_2 + \gamma y_1 + \gamma A y_0\\
&\int_x^\infty |l'''_x|\,dx < y_3 + 3\gamma y_2 + \gamma(\gamma + 3A)\,y_1 + \gamma^2 A y_0\\
&\int_x^\infty |l''''_x|\,dx < y_4 + 6\gamma y_3 + \gamma(7\gamma + 6A)\,y_2 + \gamma^2(\gamma + 10A)\,y_1\\
&\qquad + \gamma^2 A(\gamma + 3A)\,y_0.
\end{aligned}\right\} \quad (52)$$

Inserting, finally, the expressions (51), we find

$$\left.\begin{aligned}
&\int_x^\infty |l''_x|\,dx < (\mu_x + 2\gamma)\,l_x\\
&\int_x^\infty |l'''_x|\,dx < [\mu_x{}^2 + 5\gamma\mu_x + \gamma(6\gamma + A)]\,l_x - 4\gamma^2 A\,T_x\\
&\int_x^\infty |l''''_x|\,dx < [\mu_x{}^3 + 9\gamma\mu_x{}^2 + \gamma(25\gamma + 3A)\,\mu_x\\
&\qquad + \gamma^2(26\gamma - 5A)]\,l_x - 24\gamma^3 A\,T_x.
\end{aligned}\right\} \quad (53)$$

A sufficiently accurate limit is often found by leaving out the terms containing T_x.

As an example we find for the error in (44)

$$|R| < \frac{1}{384}[\mu_x{}^3 + 9\gamma\mu_x{}^2 + \gamma(25\gamma + 3A)\,\mu_x + \gamma^2(26\gamma - 5A)]. \quad (54)$$

If, for instance, $A = 0{\cdot}006$, $\gamma = 0{\cdot}09$, $\mu_x = 0{\cdot}2$, we have, by (54),

$$|R| < 0{\cdot}000261$$

from which may be concluded that (44), for most mortality-tables and tabulated ages, produces $\bar{c}_x$ with at least 3 correct decimals.

11. The transition from the expectation of life to the annuity-value is immediate. If, instead of μ_x, we write $\mu_x + \delta$, δ denoting the force of interest, $\bar{e}_x$ becomes $\bar{a}_x$, and e_x becomes $a_x = \mathrm{a}_x - 1$, while l_x becomes D_x. We may, therefore, from (44) write down the formula

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{a}_x = \mathrm{a}_x - \frac{1}{2} - \frac{\mu_x + \delta}{12} + R,\\
&|R| \leq \frac{1}{384\,D_x}\int_x^\infty |D''''_x|\,dx.
\end{aligned}\right\} \quad (55)$$

Digitized by Google

Instead of the inequality (16) we have

$$\bar{a}_x \leq \frac{1}{\mu_x + \delta} \tag{56}$$

and instead of (47), i being the rate of interest,

$$a_x \leq \frac{p_x}{q_x + i} \tag{57}$$

or

$$\mathrm{a}_x \leq \frac{1+i}{q_x + i} \tag{58}$$

which formula is obtained as follows:

$$\begin{aligned} \mathrm{a}_x &= 1 + vp_x + v^2 p_x p_{x+1} + \ldots \\ &\leq 1 + vp_x + v^2 p_x{}^2 + \ldots \\ &= \frac{1}{1 - vp_x} = \frac{1+i}{q_x + i}. \end{aligned}$$

In (56)—(58) it is assumed that the mortality does not decrease with the age.

A higher limit for $|R|$ in the case where the table is graduated by *Makeham's* formula is obtained from (54), writing $\mu_x + \delta$ for μ_x and, consequently, $A + \delta$ for A. The result is, putting for abbreviation $\lambda_x = \mu_x + \delta$,

$$|R| < \frac{1}{384}[\lambda_x{}^3 + 9\gamma\lambda_x{}^2 + \gamma(25\gamma + 3A + 3\delta)\lambda_x + \gamma^2(26\gamma - 5A - 5\delta)]. \tag{59}$$

It can be shown by a suitably selected numerical example that (55), for the most important mortality-tables, ages and rates of interest, produces the continuous annuity-value with at least 3 correct decimals, and that the upper limit of integration and summation can, within the same degree of approximation, be taken as ω instead of ∞. We need not go into the details, the method being exactly the same as in the case of the expectation of life.

12. A great many other questions which are of interest to the actuary can be treated with the same rigour, but must be reserved for another occasion. I have only wanted to show that it is possible, and not even difficult, to find sufficiently narrow limits for the error in some of the approximative formulas most frequently employed by actuaries. There is no reason why ac-

Digitized by Google

tuarial formulas should not be established on such a basis that it is clearly seen on what foundation they rest, and what can be expected of them. When much vagueness can be avoided by comparatively little trouble, there is no justification for taking the easier course.

Digitized by Google

Digitized by Google

UN PROBLÈME DE LIMITE DE LA STATISTIQUE

PAR

K.-G. HAGSTRŒM

§ 1. Introduction.

Soit x une variable réelle. Par $[x]$ nous désignerons un individu, pour lequel la propriété étudiée ξ prend la valeur x.

Envisageons un ensemble E d'individus $[x]$. Supposons d'abord que les valeurs possibles de ξ soient en nombre fini, savoir

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n,$$

et que E soit fini, le nombre d'éléments étant N. Si le nombre d'individus $[x_\nu]$ dans E est égal à $p_\nu \cdot N$, l'ensemble de pairs de nombres

$$\{p_\nu, x_\nu\}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots n,$$

forme une image abstraite qui sera nommée la *population* P et qui est évidemment commune à une infinité d'ensembles E. Faisant tendre N vers l'infini, on obtient un ensemble-limite à la même population P.

Si l'ensemble des valeurs x que ξ peut prendre est illimité, il faut que E soit infini. Nous supposerons dans ce cas que E est la limite d'une suite d'ensembles finis E_ν. Le rapport du nombre d'individus $[x]$ dans E_ν pour lesquels $x \geq a$ au nombre total d'éléments de E_ν tendra, en outre, par hypothèse, vers une valeur $s(a)$, où $s(x)$, la *fonction de probabilité*, est une fonction non décroissante, allant de 0 à 1. Alors, la fonction $s(x)$ définira, dans ce cas, la population P. On voit que le dernier cas comprend aussi le premier, $s(x)$ étant dans le premier cas une fonction de sauts, définie par les points de saut x_ν et par les sauts p_ν.

L'ensemble des ensembles E qui sont formés par le procédé

Digitized by Google

décrit dans les lignes précédentes constitue le domaine de la statistique supérieure. ξ sera nommée une *variable statistique*, admettant pour une population P la fonction de probabilité $s(x)$. Si cette fonction est dérivable, la dérivée, $s'(x) = p(x)$, sera dite la *fonction de distribution* de ξ.

§ 2. Le calcul avec les populations. Le calcul avec les variables statistiques.

Soient P, Q deux populations, E, F deux ensembles correspondants finis, les nombres d'éléments étant M et N. On peut former l'ensemble E + F. Il semble naturel que la population correspondante devient par définition la somme P + Q. Elle dépend, comme on voit, des nombres M et N, la probabilité de $[x_\nu]$ étant de la forme $(p_\nu \mathrm{M} + q_\nu \mathrm{N}) : (\mathrm{M} + \mathrm{N})$. Donc pour définir ce que doit être la somme de deux ou plusieurs populations, il faut aussi donner des poids y appartenant. La somme d'une suite de populations P_1, P_2, P_3, ... avec les poids π_1, π_2, π_3, ... ($\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \ldots = 1$) sera ainsi bien définie[1]), et la définition subsiste encore pour des ensembles E infinis. Nous allons écrire tout simplement

$$\pi_1 \mathrm{P}_2 + \pi_2 \mathrm{P}_2 + \pi_3 \mathrm{P}_3 + \ldots$$

La population la plus simple est celle qui ne contient qu'un seul individu $[x]$. On voit que la population générale peut être exprimée en somme finie ou en somme-limite de la manière suivante:

$$\mathrm{P} = p_1 \cdot [x_1] + p_2 \cdot [x_2] + \ldots + p_n \cdot [x_n]$$

ou

$$\mathrm{P} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x]\, ds(x).$$

Nous allons maintenant définir la composition de deux populations P et Q. Nous la désignerons par le signe $\times$. Elle satisfera, par définition, à la condition de distributivité, d'où l'on conclut que

$$\begin{aligned} \mathrm{P} \times \mathrm{Q} &= (p_1 [x_1] + p_2 [x_2] + \ldots) \times (q_1 [x_1] + q_2 [x_2] + \ldots) \\ &= \sum_\mu \sum_\nu p_\mu q_\nu \cdot [x_\mu] \times [x_\nu]. \end{aligned}$$

[1]) Bruns: »Mischung von Verteilungen«.

Digitized by Google

La composition sera aussi supposée d'être commutative, et il ne s'agit donc que de définir la composition simple

$$[x] \times [y].$$

Dans le cas général, les sommes sont changées en intégrales, et le raisonnement reste inaltéré. Selon la convention faite sur la signification de $[x] \times [y]$, on peut introduire différentes espèces de compositions. Nous allons en étudier quelques-unes.

Composition additive. On pose

$$[x] \times [y] = [x + y].$$

Il suffira de développer le résultat dans le cas où la fonction de distribution existe. Soit $p(x)$ celle de P, $q(y)$ celle de Q. On obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{P} \times \mathrm{Q} &= \int\int [x + y]\, p(x)\, q(y)\, dx\, dy \\ &= \int [z]\, r(z)\, dz \end{aligned}$$

où

$$r(z) = \int p(u)\, q(z - u)\, du.$$

La variable statistique ζ appartenant à la population $\mathrm{P} \times \mathrm{Q}$ ainsi définie sera, par convention, la somme indépendante[1]) des variables ξ et η. On écrit $\zeta = \xi + \eta$.

Composition multiplicative. Posons

$$[x] \times [y] = [x \cdot y]$$

et supposons que le domaine d'existence de ξ et de η soit restreint à l'axe positif. On a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{P} \times \mathrm{Q} &= \int\int [xy]\, p(x)\, q(y)\, dx\, dy \\ &= \int [z]\, r(z)\, dz \end{aligned}$$

où

$$r(z) = \int p(u)\, q\left(\frac{z}{u}\right) \frac{du}{u}.$$

On définit de cette manière le produit indépendant $\zeta = \xi \cdot \eta$ de deux varables statistiques.

Plus généralement, on peut définir une fonction indépendante quelconque de deux variables statistiques en posant

$$[x] \times [y] = [f(x, y)], \quad \zeta = f(\xi, \eta).$$

[1]) Bruns: »Mischung von Argumenten«.

Digitized by Google

La fonction $r(z)$ sera donnée par la relation

$$r(z)\,dz = \int\int p(x)\,q(y)\,dx\,dy,$$

l'intégrale étant étendue au domaine

$$x = -\infty \ldots +\infty,\ f(x, y) = z \ldots z + dz.$$

Faisons la transformation

$$u = x,\ v = f(x, y) \text{ ou, inversement, } x = u,\ y = \varphi(u, v);$$

on aura

$$\begin{aligned} r(z)\,dz &= \int\int p(u)\,q(\varphi(u, v))\left|\frac{d(x, y)}{d(u, v)}\right| du\,dv \\ &= dz \int p(u)\,q(\varphi(u, z))\,|\varphi'_z(u, z)|\,du. \end{aligned}$$

Dans le cas plus général encore, le résultat de la composition simple sera lui-même exprimé comme une population, soit

$$[x] \times [y] = \int [t]\,\sigma(t)\,dt.$$

Nous allons étudier une composition de ce type, qui sera définie dans le paragraphe suivant.

§ 3. La composition héréditaire.

La variable réelle x prendra les $n+1$ valeurs

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \frac{\nu}{n}, \ldots 1,$$

n étant un nombre fixe. Les populations P et Q seront données par les expressions

$$\mathrm{P} = p_0 \cdot [0] + p_1 \cdot \left[\frac{1}{n}\right] + \ldots + p_\nu \cdot \left[\frac{\nu}{n}\right] + \ldots + p_n \cdot [1],$$

$$\mathrm{Q} = q_0 \cdot [0] + q_1 \cdot \left[\frac{1}{n}\right] + \ldots + q_n q \left[\frac{\nu}{n}\right] + \ldots + q_n \cdot [1].$$

La *composition héréditaire* de ces populations sera désignée par le signe $\odot$. D'après ce qui précède, elle sera définie si l'on sait ce que signifie $[x] \odot [y]$ ou $\left[\frac{\mu}{n}\right] \odot \left[\frac{\nu}{n}\right]$. Conformément aux idées de MENDEL sur l'effet des croisements des êtres vivants,

Digitized by Google

nous supposons que l'individu $\left[\frac{\nu}{n}\right]$ soit caractérisé par un complexe d'unités héréditaires, désignées par 0 et 1, dont le nombre sera n. La »nuance« de l'individu, la variable statistique ξ, sera mesurée par le rapport du nombre d'*uns* dans le complexe, ν, au nombre total d'unités héréditaires dans le complexe, n.

La composition de deux individus se fera en combinant de toute manière possible les unités héréditaires des deux complexes en question. Par un raisonnement simple,[1]) on trouve la probabibite $\pi_{\mu\nu}^{(\lambda)}$ de la nuance $\frac{\lambda}{n}$ dans la descendance des individus $\left[\frac{\mu}{n}\right]$ et $\left[\frac{\nu}{n}\right]$. On a pour cette probabilité

$$\pi_{\mu\nu}^{(\lambda)} = \frac{\binom{2n-\mu-\nu}{n-\lambda}\cdot\binom{\mu+\nu}{\lambda} - e_{\mu\nu}^{(\lambda)}}{\binom{2n}{n}-2}.$$

$$\text{où } e_{\mu\nu}^{(\lambda)} = 0 \text{ pour } \lambda \neq \mu \text{ et } \lambda \neq \nu,$$
$$= 1 \text{ pour } \lambda = \mu \text{ ou } \lambda = \nu,$$
$$= 2 \text{ pour } \lambda = \mu = \nu.$$

On doit donc poser

$$\left[\frac{\mu}{n}\right] \odot \left[\frac{\nu}{n}\right] = \sum_{\lambda=0}^{n} \pi_{\mu\nu}^{(\lambda)} \cdot \left[\frac{\lambda}{n}\right].$$

Pour $n = 2$, la composition héréditaire ainsi définie se confond avec la loi connue mendélienne pour trois nuances. Elle doit en être regardée comme une généralisation. Les biologistes, en cherchant à interpréter les nuances, ont choisi une autre direction plus compliquée. Cependant, comme la Nature préfère toujours les explicateurs simples, il est bien possible que cette généralisation se montrera un jour utile.

La composition itérée d'une population donne naissance à la notion de »puissance héréditaire«. On obtient pour le carré

[1]) Voir: Ein erblichkeitstheoretisches Grenzproblem. Svenska Aktuarieföreningens tidskrift 1916, p. 169.

Digitized by Google

$$P^{\odot 2 \odot} = \left[\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \cdot \left[\frac{\nu}{n}\right]\right]^{\odot 2 \odot} = \sum\sum p_\mu p_\nu \cdot \left[\frac{\mu}{n}\right] \odot \left[\frac{\nu}{n}\right]$$

$$= \sum_{\lambda}\sum_{\mu}\sum_{\nu} \pi^{(\lambda)}_{\mu\nu}\, p_\mu p_\nu \cdot \left[\frac{\lambda}{n}\right] = \sum_{\lambda=0}^{n} p'_\lambda \cdot \left[\frac{\lambda}{n}\right]$$

$$p'_\lambda = \sum_{\mu}\sum_{\nu} \pi^{(\lambda)}_{\mu\nu}\, p_\mu p_\nu .$$

L'extension à la puissance $P^{\odot n \odot}$ est immédiate. Il faut seulement observer que la composition héréditaire *n'est pas associative.*

C'est le carré d'une population qui doit avoir une importance pratique. En effet, il doit se présenter quand on fait des croisements de toutes les manières possibles dans un ensemble mixte d'individus d'un genre admettant le nombre donné $n+1$ de nuances possibles.

§ 4. Un système de formes quadratiques.

L'expression

$$p'_\lambda = \sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{n} \pi^{(\lambda)}_{\mu\nu}\, p_\mu p_\nu$$

définit $n+1$ formes quadratiques. Nous allons étudier ces formes. Leurs matrices sont composées de la manière suivante:

$$\left\| \pi^{(\lambda)}_{\mu\nu} \right\| = \frac{1}{c_n} \cdot \left\{ \left\| \binom{2n-(\mu+\nu)}{n-\lambda} \cdot \binom{\mu+\nu}{\lambda} \right\| - \left\| e^{(\lambda)}_{\mu\nu} \right\| \right\},$$

où

$$c_n = \binom{2n}{n} - 2 .$$

La première de ces matrices est symétrique et de l'espèce dite récurrente ou de HANKEL. Pour tous les λ, on obtient ces matrices par la construction que voici. Formons d'abord la matrice non quadratique

$$K = \begin{Vmatrix} k^{(0)}_0, & k^{(0)}_1, & k^{(0)}_2, \ldots, & k^{(0)}_\sigma, \ldots & k^{(0)}_{2n} \\ k^{(1)}_0, & k^{(1)}_1, & k^{(1)}_2, \ldots, & k^{(1)}_\sigma, \ldots & k^{(2)}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \ldots & \cdot \ldots & \cdot \\ k^{(n)}_0, & k^{(n)}_1, & k^{(n)}_2, \ldots, & k^{(n)}_\sigma, \ldots & k^{(n)}_{2n} \end{Vmatrix}$$

$$\text{avec } k^{(\lambda)}_\sigma = \binom{2n-\sigma}{n-\lambda}\binom{\sigma}{\lambda} .$$

Digitized by Google

On a $k_0^{(\lambda)} = k_1^{(\lambda)} = \ldots = k_{\lambda-1}^{(\lambda)} = 0$,

$k_{\lambda+n+1}^{(\lambda)} = k_{\lambda+n+2}^{(\lambda)} = \ldots = k_{2n}^{(\lambda)} = 0$. La matrice $\left\| k_{\mu+\nu}^{(\lambda)} \right\|$ est formée de la ligne $\lambda^{\text{ième}}$ de K de la manière bien connue de récurrence.

Enfin, la matrice $\left\| e_{\mu\nu}^{(\lambda)} \right\|$ est caractérisée par ce que tous les éléments sont $= 0$ sauf ceux de la ligne et colonne $\lambda^{\text{ièmes}}$. Ces derniers sont tous $= 1$, sauf celui du point d'intersection, qui est égal à 2.

Nous allons démontrer que *le déterminant de la forme* p'_λ *est égal à zéro.*

A cet effet, appliquons à la matrice $\left\| \pi_{\mu\nu}^{(\lambda)} \right\|$ une opération ω, définie dans ce qui suit. Cette opération, souvent employée en calculant la valeur d'un déterminant récurrent, laisse évidemment inaltérée la valeur du déterminant de la matrice. On tire des éléments de chaque colonne, sauf de la première, les éléments correspondants de la colonne immédiatement précédente. Ensuite, on fait de même pour les lignes. Retournant aux colonnes, on fait la même construction de nouveau, en omettant maintenant les deux premières colonnes, et ainsi de suite.

La matrice résultante $\omega \cdot \left\| \pi_{\mu\nu}^{(\lambda)} \right\|$ peut évidemment être obtenue en effectuant l'opération ω sur les deux composantes, c.-à.-d.

$$\omega \left\| \pi_{\mu\nu}^{(\lambda)} \right\| = \frac{1}{c_n} \left[\omega \left\| k_{\mu+\nu}^{(\lambda)} \right\| - \omega \left\| e_{\mu\nu}^{(\lambda)} \right\| \right].$$

En effet, l'ordre des soustractions en question est indifférent.

Or il est bien connu que le résultat $\omega \left\| k_{\mu+\nu}^{(\lambda)} \right\|$ est une nouvelle matrice récurrente, formée par les éléments

$$k_0^{(\lambda)},\ \Delta k_0^{(\lambda)},\ \Delta^2 k_0^{(\lambda)},\ \ldots,\ \Delta^{2n} k_0^{(\lambda)}$$

de la première ligne du schème de différences de la suite

$$k_0^{(\lambda)},\ k_1^{(\lambda)},\ k_2^{(\lambda)},\ \ldots,\ k_{2n}^{(\lambda)}.$$

Digitized by Google

D'autre part, on peut facilement calculer ces différences. On obtient

$$\Delta^{\nu} k_0^{(\lambda)} = \sum_{\varrho=0}^{\nu-\lambda} (-1)^{\varrho} \binom{\nu}{\varrho} k_{\nu-\varrho}^{(\lambda)}$$

$$= \binom{n}{\lambda} \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{\nu}} \sum_{\varrho=0}^{\nu-\lambda} (-1)^{\varrho} \binom{2n-\nu+p}{\varrho} \binom{n}{\nu-\varrho-\lambda}$$

$$= (-1)^{\nu-\lambda} \binom{\nu}{\lambda} \binom{2n-\nu}{n}.$$

La fonction $k_{\sigma}^{(\lambda)}$ étant du degré n en σ, on a $\Delta^{n+1} k_0^{(\lambda)} = \Delta^{n+2} k_0^{(\lambda)} = \ldots = 0$ et la matrice résultante $\omega \left\| k_{\mu+\nu}^{(\lambda)} \right\| = \left\| \Delta^{\mu+\nu} k_0^{(\lambda)} \right\|$ a donc tous les éléments au-dessous de la diagonale secondaire égaux à 0. Les éléments de cette diagonale sont tous $= \Delta^{n} k_0^{(\lambda)} = (-1)^{n-\lambda} \binom{n}{\lambda}$.

Calculons maintenant la matrice $\omega \left\| e_{\mu\nu}^{(\lambda)} \right\|$. Après le deux premiers pas de la construction, on a évidemment la matrice

$$\left\| \begin{array}{llllll} 0, 0, \ldots (\lambda \text{ zéros}) \ldots 0, & +1, & -1, & 0 \ldots (n-\lambda-1 \text{ zéros}) \ldots 0 \\ 0, 0, \ldots \quad . \quad \ldots 0, & 0, & 0, & 0 \ldots \quad . \quad \ldots 0 \\ (\lambda \text{ zéros} \quad . \quad . & . & . & . \quad . & . \quad . \\ 0, 0, \ldots \quad . \quad 0, & 0, & 0, & 0 \ldots \quad . \quad \ldots 0 \\ +1, 0 \ldots \quad . \quad 0, & 0, & 0, & 0 \ldots \quad . \quad \ldots 0 \\ -1, 0 \ldots \quad . \quad 0, & 0, & 0, & 0 \ldots \quad . \quad \ldots 0 \\ 0, 0 \ldots \quad . \quad 0, & 0, & 0, & 0 \ldots \quad . \quad \ldots 0 \\ (n-\lambda-1 \text{ zéros}) \quad . & . & . & . \ldots . \quad . \quad \ldots . \\ 0, 0 \ldots \quad . \quad 0, & 0, & 0, & 0 \ldots \quad . \quad \ldots 0 \end{array} \right\|$$

En continuant, on obtient des zéros partout, sauf dans la ligne et colonne premières. Ici, on trouve facilement que l'élément $\nu^{\text{ième}}$ devient $= (-1)^{\nu-\lambda} \binom{\nu}{\nu-\lambda}$. Spécialement, le dernier élément est $= (-1)^{n-\lambda} \binom{n}{n-\lambda} = (-1)^{n-\lambda} \binom{n}{\lambda}$. Il est par conséquent identique à l'élément correspondant de $\omega \left\| k_{\mu+\nu}^{(\lambda)} \right\|$. Par

Digitized by Google

la soustraction on obtient donc une matrice, dont la ligne $n^{\text{ième}}$ et la colonne $n^{\text{ième}}$ consistent de zéros exclusivement, et dont le déterminant est, par conséquent, égal à zéro.

Or on a évidemment

$$\frac{\partial p'_\lambda}{\partial p_\mu} = \sum_{\nu=0}^{n} \pi_{\mu\nu}^{(\lambda)} p_\nu \quad (\mu = 0 \ldots n,\ \lambda = 0 \ldots n).$$

Le déterminant $\left| \pi_{\mu\nu}^{(\lambda)} \right|$ étant $= 0$, on peut trouver des nombres $C_0, C_1 \ldots C_n$, dont au moins deux $\neq 0$, tels que l'on a *identiquement*

$$C_0 \frac{\partial p_\lambda'}{\partial p_0} + C_1 \frac{\partial p_\lambda'}{\partial p_1} + \ldots + C_n \frac{\partial p_\lambda'}{\partial p_n} = 0.$$

En effet, le système

$$\begin{aligned} \pi_{00}^{(\lambda)} C_0 + \pi_{10}^{(\lambda)} C_1 + \ldots + \pi_{n0}^{(\lambda)} C_n &= 0, \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdots \qquad \cdot \qquad \cdot & \\ \pi_{0n}^{(\lambda)} C_0 + \pi_{1n}^{(\lambda)} C_1 + \ldots + \pi_{nn}^{(\lambda)} C_n &= 0 \end{aligned}$$

admet ∞^{n+1-p} solutions, p étant le *rang* du déterminant. Nous allons choisir une de ces solutions qui satisfait à la condition

$$C_0 + C_1 + \ldots + C_n = 1.$$

En posant

$$\begin{aligned} p_0 &= \bar{p}_0 + C_0 \bar{p}_n, \\ p_1 &= \bar{p}_1 + C_1 \bar{p}_n, \\ \cdot \quad & \cdot\cdot \quad \cdots \\ p_{n-1} &= \bar{p}_{n-1} + C_{n-1} \bar{p}_n, \\ p_n \quad &= \qquad\qquad C_n \bar{p}_n, \end{aligned}$$

on peut transformer la forme $p_\lambda'(p_0, p_1 \ldots p_n)$ en une autre forme $\bar{p}_n'(\bar{p}_0, \bar{p}_1 \ldots \bar{p}_n)$ et l'on a

$$\frac{\partial \bar{p}_{\lambda 1}'}{\partial \bar{p}_n} = \frac{\partial p_\lambda'}{\partial p_0} \cdot C_0 + \ldots + \frac{\partial p_\lambda'}{\partial p_n} C_n = 0.$$

Donc, la transformation a donné une forme des nouvelles variables

$$\bar{p}_0, \bar{p}_1, \cdots \bar{p}_n,$$

satisfaisant aussi à la condition

$$p_0 + p_1 + \ldots + p_n = 1$$

Digitized by Google

et ayant la propriété de ne dépendre que des n premières variables. Par ce procédé, il est possible de simplifier les formes étudiées.

Les éléments des cas $n = 2$, 3, 4 et 5 sont donnés dans les tableaux suivants. Il faut observer qu'en introduisant dans la notation des variables des coefficients binomiaux, pour $n \leqq 3$, on peut mettre en évidence le caractère entier des formes. En écrivant pour $n = 3$ $\omega_0 = p_0$, $3\,\omega_1 = p_1$, $3\,\omega_2 = p_2$, $\omega_3 = p_3$, on obtient le système suivant

$$\omega_0' = \omega_0^2 + 3\,\omega_0\,\omega_1 + 2\,\omega_1^2 + \omega_0\,\omega_2 + \omega_1\,\omega_2,$$
$$\omega_1' = 3\,\omega_0\,\omega_1 + 4\,\omega_0\,\omega_2 + 5\,\omega_1^2 + \omega_0\,\omega_3 + 8\,\omega_1\,\omega_2 + \omega_1\,\omega_3 + 2\,\omega_2^2,$$
$$\omega_2' = 2\,\omega_1^2 + \omega_0\,\omega_2 + \omega_0\,\omega_3 + 8\,\omega_1\,\omega_2 + 4\,\omega_1\,\omega_3 + 5\,\omega_2^2 + 3\,\omega_2\,\omega_3,$$
$$\omega_3' = \omega_1\,\omega_2 + \omega_1\,\omega_3 + 2\,\omega_2^2 + 3\,\omega_2\,\omega_3 + \omega_3^2,$$

et ainsi de suite.

TABLEAU 1.

Trois nuances.

$n = 2$.

$$K = \begin{Vmatrix} 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{Vmatrix} \qquad c_2 = 4.$$

MATRICES $\left\| \pi_{\mu\nu}^{(\lambda)} \right\|$.

$$\lambda = 0. \quad \frac{1}{4}\left\{ \begin{Vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \right\} = \frac{1}{4} \begin{Vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\lambda = 1. \quad \frac{1}{4}\left\{ \begin{Vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \right\} = \frac{1}{4} \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{Vmatrix}$$

Digitized by Google

$$\lambda = 2. \quad \frac{1}{4}\left\{ \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \right\} = \frac{1}{4} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{Vmatrix}$$

FORMES

$$p'_0 = p_0^2 + p_0 p_1 + \frac{1}{4} p_1^2 = \left(p_0 + \frac{1}{2} p_1\right)^2$$

$$p'_1 = p_0 p_1 + 2 p_0 p_2 + \frac{1}{2} p_1^2 + p_1 p_2 = 2\left(p_0 + \frac{1}{2} p_1\right)\left(\frac{1}{2} p_1 + p_2\right)$$

$$p'_2 = \frac{1}{4} p_1^2 + p_1 p_2 + p_2^2 = \left(\frac{1}{2} p_1 + p_2\right)^2$$

PROBABILITÉ DES NUANCES

Composition :	Nuances : $\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	
$\left[\frac{0}{2}\right] \odot \left[\frac{0}{2}\right]$	1	0	0	$\left[\frac{2}{2}\right] \odot \left[\frac{2}{2}\right]$
$\left[\frac{0}{2}\right] \odot \left[\frac{1}{2}\right]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\left[\frac{1}{2}\right] \odot \left[\frac{2}{2}\right]$
$\left[\frac{0}{2}\right] \odot \left[\frac{2}{2}\right]$	0	1	0	$\left[\frac{2}{2}\right] \odot \left[\frac{0}{2}\right]$
$\left[\frac{1}{2}\right] \odot \left[\frac{1}{2}\right]$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\left[\frac{1}{2}\right] \odot \left[\frac{1}{2}\right]$
	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{2}$	Nuances : / Composition :

TABLEAU 2.

Quatre nuances.

$n = 3$.

$$K = \begin{Vmatrix} 20 & 10 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 12 & 9 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 12 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 10 & 20 \end{Vmatrix} \qquad c_3 = 18.$$

Digitized by Google

MATRICES $\left\| \pi_{\mu\nu}^{(\lambda)} \right\|$.

$$\lambda=0.\quad \frac{1}{18}\left\{\begin{Vmatrix} 20 & 10 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\right\} = \frac{1}{18}\begin{Vmatrix} 18 & 9 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{9} & \frac{1}{18} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{18} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\lambda=1.\quad \frac{1}{18}\left\{\begin{Vmatrix} 0 & 10 & 12 & 9 \\ 10 & 12 & 9 & 4 \\ 12 & 9 & 4 & 0 \\ 9 & 4 & 0 & 0 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\right\} = \frac{1}{18}\begin{Vmatrix} 0 & 9 & 12 & 9 \\ 9 & 10 & 8 & 3 \\ 12 & 8 & 4 & 0 \\ 9 & 3 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\lambda=2.\quad \frac{1}{18}\left\{\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & 9 & 12 \\ 4 & 9 & 12 & 10 \\ 9 & 12 & 10 & 0 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}\right\} = \frac{1}{18}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 8 & 10 & 9 \\ 9 & 12 & 9 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\lambda=3.\quad \frac{1}{18}\left\{\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}\right\} = \frac{1}{18}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 18 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{18} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{18} & \frac{2}{9} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 \end{Vmatrix}$$

FORMES.

$$p_0' = p_0^2 + p_0 p_1 + \frac{2}{9} p_1^2 + \frac{1}{3} p_0 p_2 + \frac{1}{9} p_1 p_2$$

$$p_1' = p_0 p_1 + \frac{4}{3} p_0 p_2 + \frac{5}{9} p_1^2 + p_0 p_3 + \frac{8}{9} p_1 p_2 + \frac{1}{3} p_1 p_3 + \frac{2}{9} p_2^2$$

$$p_2' = \frac{2}{9} p_1^2 + \frac{1}{3} p_0 p_2 + p_0 p_3 + \frac{8}{9} p_1 p_2 + \frac{4}{3} p_1 p_3 + \frac{5}{9} p_2^2 + p_2 p_3$$

$$p_3' = \frac{1}{9} p_1 p_2 + \frac{1}{3} p_1 p_3 + \frac{2}{9} p_2^2 + p_2 p_3 + p_3^2.$$

Digitized by Google

PROBABILITÉS DES NUANCES.

Composition :	Nuances : $\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	
$\left[\frac{0}{3}\right] \odot \left[\frac{0}{3}\right]$	1	0	0	0	$\left[\frac{3}{3}\right] \odot \left[\frac{3}{3}\right]$
$\left[\frac{0}{3}\right] \odot \left[\frac{1}{3}\right]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\left[\frac{3}{3}\right] \odot \left[\frac{2}{3}\right]$
$\left[\frac{0}{3}\right] \odot \left[\frac{2}{3}\right]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\left[\frac{3}{3}\right] \odot \left[\frac{1}{3}\right]$
$\left[\frac{1}{3}\right] \odot \left[\frac{1}{3}\right]$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\left[\frac{2}{3}\right] \odot \left[\frac{2}{3}\right]$
$\left[\frac{0}{3}\right] \odot \left[\frac{3}{3}\right]$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\left[\frac{3}{3}\right] \odot \left[\frac{0}{3}\right]$
$\left[\frac{1}{3}\right] \odot \left[\frac{2}{3}\right]$	$\frac{1}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\left[\frac{2}{3}\right] \odot \left[\frac{1}{3}\right]$
	$\frac{3}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{3}$ Nuances :	Composition :

TABLEAU 3.

Cinq Nuances.

$n = 4.$

$$K = \begin{Vmatrix} 70 & 35 & 15 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 40 & 30 & 16 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 30 & 36 & 30 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 16 & 30 & 40 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{Vmatrix} \qquad c_4 = 68.$$

MATRICES $\left\| \pi_{\mu\nu}^{(\lambda)} \right\|$.

$\lambda = 0.$

$$\frac{1}{68}\left\{\begin{Vmatrix} 70 & 35 & 15 & 5 & 1 \\ 35 & 15 & 5 & 1 & 0 \\ 15 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\right\} - \frac{1}{68}\begin{Vmatrix} 68 & 34 & 14 & 4 & 0 \\ 34 & 15 & 5 & 1 & 0 \\ 14 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{34} & \frac{1}{17} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{15}{68} & \frac{5}{68} & \frac{1}{68} & 0 \\ \frac{7}{34} & \frac{5}{68} & \frac{1}{68} & 0 & 0 \\ \frac{1}{17} & \frac{1}{68} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Digitized by Google

$$\lambda = 1. \quad \frac{1}{68}\left\{\begin{Vmatrix} 0 & 35 & 40 & 30 & 16 \\ 35 & 40 & 30 & 16 & 5 \\ 40 & 30 & 16 & 5 & 0 \\ 30 & 16 & 5 & 0 & 0 \\ 16 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\right\} = \frac{1}{68}\begin{Vmatrix} 0 & 34 & 40 & 30 & 16 \\ 34 & 38 & 29 & 15 & 4 \\ 40 & 29 & 16 & 5 & 0 \\ 30 & 15 & 5 & 0 & 0 \\ 16 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{10}{17} & \frac{15}{34} & \frac{4}{17} \\ \frac{1}{2} & \frac{19}{34} & \frac{29}{68} & \frac{15}{68} & \frac{1}{17} \\ \frac{10}{17} & \frac{29}{68} & \frac{4}{17} & \frac{5}{68} & 0 \\ \frac{15}{34} & \frac{15}{68} & \frac{5}{68} & 0 & 0 \\ \frac{4}{17} & \frac{1}{17} & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\lambda = 2. \quad \frac{1}{68}\left\{\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 15 & 30 & 36 \\ 0 & 15 & 30 & 36 & 30 \\ 15 & 30 & 36 & 30 & 15 \\ 30 & 36 & 30 & 15 & 0 \\ 36 & 30 & 15 & 0 & 0 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\right\} = \frac{1}{68}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 14 & 30 & 36 \\ 0 & 15 & 29 & 36 & 30 \\ 14 & 29 & 34 & 29 & 14 \\ 30 & 36 & 29 & 15 & 0 \\ 36 & 30 & 14 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \frac{7}{34} & \frac{15}{34} & \frac{9}{17} \\ 0 & \frac{15}{68} & \frac{29}{68} & \frac{9}{17} & \frac{15}{34} \\ \frac{7}{34} & \frac{29}{68} & \frac{1}{2} & \frac{29}{68} & \frac{7}{34} \\ \frac{15}{34} & \frac{9}{17} & \frac{29}{68} & \frac{15}{68} & 0 \\ \frac{9}{17} & \frac{15}{34} & \frac{7}{34} & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\lambda = 3. \quad \frac{1}{68}\left\{\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 5 & 16 & 30 \\ 0 & 5 & 16 & 30 & 40 \\ 5 & 16 & 30 & 40 & 35 \\ 16 & 30 & 40 & 35 & 0 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}\right\} = \frac{1}{68}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & 30 \\ 0 & 5 & 16 & 29 & 40 \\ 4 & 15 & 29 & 38 & 34 \\ 16 & 30 & 40 & 34 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{17} & \frac{4}{17} \\ 0 & 0 & \frac{5}{68} & \frac{15}{68} & \frac{15}{34} \\ 0 & \frac{5}{68} & \frac{4}{17} & \frac{29}{68} & \frac{10}{17} \\ \frac{1}{17} & \frac{15}{68} & \frac{29}{68} & \frac{19}{34} & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{14} & \frac{15}{34} & \frac{10}{17} & \frac{1}{2} & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\lambda = 4. \quad \frac{1}{68}\left\{\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 15 \\ 0 & 1 & 5 & 15 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}\right\} = \frac{1}{68}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 1 & 5 & 15 & 34 \\ 0 & 4 & 14 & 34 & 68 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{68} & \frac{1}{17} \\ 0 & 0 & \frac{1}{68} & \frac{5}{68} & \frac{7}{34} \\ 0 & \frac{1}{68} & \frac{5}{68} & \frac{15}{68} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{17} & \frac{7}{34} & \frac{1}{2} & 1 \end{Vmatrix}$$

Digitized by Google

PROBABILITÉS DES NUANCES:

Composition :	Nuances : $\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	
$\left[\frac{0}{4}\right] \odot \left[\frac{0}{4}\right]$	1	0	0	0	0	$\left[\frac{4}{4}\right] \odot \left[\frac{4}{4}\right]$
$\left[\frac{0}{4}\right] \odot \left[\frac{1}{4}\right]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\left[\frac{4}{4}\right] \odot \left[\frac{3}{4}\right]$
$\left[\frac{0}{4}\right] \odot \left[\frac{2}{4}\right]$	$\frac{7}{34}$	$\frac{10}{17}$	$\frac{7}{34}$	0	0	$\left[\frac{4}{4}\right] \odot \left[\frac{2}{4}\right]$
$\left[\frac{1}{4}\right] \odot \left[\frac{1}{4}\right]$	$\frac{15}{68}$	$\frac{19}{34}$	$\frac{15}{68}$	0	0	$\left[\frac{3}{4}\right] \odot \left[\frac{3}{4}\right]$
$\left[\frac{0}{4}\right] \odot \left[\frac{3}{4}\right]$	$\frac{1}{17}$	$\frac{15}{34}$	$\frac{15}{34}$	$\frac{1}{17}$	0	$\left[\frac{4}{4}\right] \odot \left[\frac{1}{4}\right]$
$\left[\frac{1}{4}\right] \odot \left[\frac{2}{4}\right]$	$\frac{5}{68}$	$\frac{29}{68}$	$\frac{29}{68}$	$\frac{5}{68}$	0	$\left[\frac{3}{4}\right] \odot \left[\frac{2}{4}\right]$
$\left[\frac{0}{4}\right] \odot \left[\frac{4}{4}\right]$	0	$\frac{4}{17}$	$\frac{9}{17}$	$\frac{4}{17}$	0	$\left[\frac{4}{4}\right] \odot \left[\frac{0}{4}\right]$
$\left[\frac{1}{4}\right] \odot \left[\frac{3}{4}\right]$	$\frac{1}{68}$	$\frac{15}{68}$	$\frac{9}{17}$	$\frac{15}{68}$	$\frac{1}{68}$	$\left[\frac{3}{4}\right] \odot \left[\frac{1}{4}\right]$
$\left[\frac{2}{4}\right] \odot \left[\frac{2}{4}\right]$	$\frac{1}{68}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{1}{68}$	$\left[\frac{2}{4}\right] \odot \left[\frac{2}{4}\right]$
	$\frac{4}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{0}{4}$	Nuances : Composition :

TABLEAU 4.

Six nuances.

$n = 5.$

$$K = \begin{Vmatrix} 250 & 126 & 56 & 21 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 126 & 140 & 105 & 60 & 25 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 46 & 105 & 120 & 100 & 60 & 21 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 60 & 100 & 120 & 105 & 56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 25 & 60 & 105 & 140 & 126 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 250 \end{Vmatrix} \quad c_5 = 250.$$

Digitized by Google

MATRICES $\left\| \pi_{\mu\nu}^{(\lambda)} \right\|$.

$\lambda = 0.$ $\frac{1}{250}\left\{\begin{Vmatrix} 250 & 126 & 56 & 21 & 6 & 1 \\ 126 & 56 & 21 & 6 & 1 & 0 \\ 56 & 21 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 21 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\right\} = \frac{1}{250}\begin{Vmatrix} 248 & 125 & 55 & 20 & 5 & 0 \\ 125 & 56 & 21 & 6 & 1 & 0 \\ 55 & 21 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 20 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$

$\lambda = 1.$ $\frac{1}{250}\left\{\begin{Vmatrix} 0 & 126 & 140 & 105 & 60 & 25 \\ 126 & 140 & 105 & 60 & 25 & 6 \\ 140 & 105 & 60 & 25 & 6 & 0 \\ 105 & 60 & 25 & 6 & 0 & 0 \\ 60 & 25 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\right\} = \frac{1}{250}\begin{Vmatrix} 0 & 125 & 140 & 105 & 60 & 25 \\ 125 & 138 & 104 & 59 & 24 & 5 \\ 140 & 104 & 60 & 25 & 6 & 0 \\ 105 & 59 & 25 & 6 & 0 & 0 \\ 60 & 24 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$

$\lambda = 2.$ $\frac{1}{250}\left\{\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 56 & 105 & 120 & 100 \\ 0 & 56 & 105 & 120 & 100 & 60 \\ 56 & 105 & 120 & 100 & 60 & 21 \\ 105 & 120 & 100 & 60 & 21 & 0 \\ 120 & 100 & 60 & 21 & 0 & 0 \\ 100 & 60 & 21 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\right\} = \frac{1}{250}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 55 & 105 & 120 & 100 \\ 0 & 56 & 104 & 120 & 100 & 60 \\ 55 & 104 & 118 & 99 & 59 & 20 \\ 105 & 120 & 99 & 60 & 21 & 0 \\ 120 & 100 & 59 & 21 & 0 & 0 \\ 100 & 60 & 20 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$

etc.

§ 5. L'invariance de la population binomiale.

En désignant par p et q deux nombres dont la somme est 1, on définit une *population binomiale* par l'expression

$$B = B(p) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} p^{n-\nu} q^{\nu} \cdot \left[\frac{\nu}{n}\right] = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \cdot \left[\frac{\nu}{n}\right].$$

Pour le carré, on obtient

$$B^{\odot 2 \odot} = \sum_{\lambda=0}^{n} \left(\sum_{\nu} \sum_{\mu} \pi_{\mu\nu}^{(\lambda)} b_\mu b_\nu \right) \cdot \left[\frac{\lambda}{n}\right].$$

Or on trouve sans difficulté les relations suivantes

$$\sum_{\nu} \sum_{\mu} \pi_{\mu\nu}^{(\lambda)} b_\mu b_\nu = \frac{1}{c_n} \sum_{\varrho=\lambda}^{\lambda+n} \left\{ \binom{2n-\varrho}{n-\lambda} \binom{\varrho}{\lambda} \sum_{\varkappa=0}^{\varrho} \binom{n}{\varkappa} \binom{n}{\varrho-\varkappa} - 2\binom{n}{\lambda}\binom{n}{\varrho-\lambda} \right\} \cdot p^{2n-\varrho} q^{\varrho}$$

Digitized by Google

$$= \frac{1}{c_n}\binom{n}{\lambda}\sum_{\varrho=\lambda}^{\lambda+n}\left\{\binom{n}{\varrho-\lambda}\sum_{\varkappa=0}^{\varrho}\binom{2n-\varrho}{n-\varkappa}\binom{\varrho}{\varkappa} - 2\binom{n}{\varrho-\lambda}\right\} p^{2n-\varrho}\, q^{\varrho}$$

$$= \frac{1}{c_n}\cdot\binom{n}{\lambda}\sum_{\varrho=\lambda}^{\lambda+n}\binom{n}{\varrho-\lambda}\cdot c_n\cdot p^{2n-\varrho}\, q^{\varrho}$$

$$= b_\lambda \sum_{\tau=0}^{n}\binom{n}{\tau} p^{n-\tau}\, q^{\tau}$$

$$= b_\lambda (p+q)^n = b_\lambda$$

Donc, on a démontré *que la population binomiale se reproduit toujours, si on l'élève au carré:*

$$B^{\odot 2\odot} = B,$$

donc aussi que

$$B^{\odot m\odot} = B.$$

§ 6. Enoncé du théorème. Cas spéciaux.

Dans le cas général, il s'agit d'étudier les carrés successifs d'une population initiale quelconque

$$P = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \left[\frac{\nu}{n}\right],$$

étant donné le nombre $n+1$ des nuances possibles. Posons

$$\begin{aligned} P' &= P^{\odot 2\odot}, \\ P'' &= P'^{\odot 2\odot} = P^{\odot 4\odot}, \\ P''' &= P''^{\odot 2\odot} = P^{\odot 8\odot}, \\ &\cdots \qquad\qquad \cdots \\ P^{(m)} &= P^{\odot 2^m\odot}. \end{aligned}$$

On a probablement

$$\lim_{m\to\infty} P^{(m)} = \lim_{m\to\infty} P^{\odot 2^m\odot} = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \left[\frac{\nu}{n}\right],$$

où $b_\nu = \binom{n}{\nu} w^{n-\nu}(1-w)^\nu$ *est un terme binomial, w dépendant de* $p_0, p_1 \ldots p_n$.

Si la composition héréditaire définie dans ce qui précède correspond aux faits naturels, ce théorème a évidemment une importance philosophique.

Digitized by Google

Pour $n = 2$, le théorème est évident. Posant

$$P = p_0 \cdot \left[\frac{0}{2}\right] + p_1 \cdot \left[\frac{1}{2}\right] + p_2 \cdot \left[\frac{2}{2}\right].$$

on obtient

$$P' = P \odot^2 \odot = b_0 \cdot \left[\frac{0}{2}\right] + b_1 \cdot \left[\frac{1}{2}\right] + b_2 \cdot \left[\frac{2}{2}\right]$$

où

$$b_0 = \left(p_0 + \frac{1}{2} p_1\right)^2,$$

$$b_1 = 2 \cdot \left(p_0 + \frac{1}{2} p_1\right)\left(\frac{1}{2} p_1 + p_2\right),$$

$$b_2 = \left(\frac{1}{2} p_1 + p_2\right)^2.$$

Toutes les populations $P^{(m)}$ suivantes sont identiques à celle-ci. Le résultat est trouvé par G. H. HARDY.[1])

Pour $n = 2$, j'ai calculé les populations successives dans les trois cas simples suivants.

Cas extrême. Posons

$$P_1 = p \cdot \left[\frac{0}{3}\right] + q \cdot \left[\frac{1}{3}\right].$$

On trouve

$$P_1' = p^2 \cdot \left[\frac{0}{3}\right] + pq \left[\frac{1}{3}\right] + pq \left[\frac{2}{3}\right] + q^2 \left[\frac{3}{3}\right].$$

$$\begin{aligned} P_1'' = {} & p^2\left(p^2 + \frac{4}{3} pq + \frac{1}{3} q^2\right) \cdot \left[\frac{0}{3}\right] \\ & + pq\left(\frac{7}{3} p^2 + \frac{8}{3} pq + \frac{1}{3} q^2\right) \cdot \left[\frac{1}{3}\right] \\ & + pq\left(\frac{1}{3} p^2 + \frac{8}{3} pq + \frac{7}{3} q^2\right) \cdot \left[\frac{2}{3}\right] \\ & + q^2\left(\frac{1}{3} p^2 + \frac{4}{3} pq + q^2\right) \cdot \left[\frac{3}{3}\right]. \end{aligned}$$

et pour $m \geqq 3$

$$\begin{aligned} P_1^{(m)} = {} & p^3 \cdot \left[\frac{0}{3}\right] + 3p^2q \cdot \left[\frac{1}{3}\right] + 3pq^2 \cdot \left[\frac{2}{3}\right] + q^3 \cdot \left[\frac{3}{3}\right] \\ & + 3^{-m+1}\left\{p^2q \cdot \left[\frac{0}{3}\right] + pq\,(q - 2p) \cdot \left[\frac{1}{3}\right] + pq\,(p - 2q) \cdot \left[\frac{2}{3}\right]\right. \\ & \left. + pq^2 \cdot \left[\frac{3}{3}\right]\right\}. \end{aligned}$$

[1]) *G. H. Hardy*: Mendelian proportions in a mixed population. Science N. S. Tome 28, 1908, p. 49.

Digitized by Google

La population $m^{\text{ième}}$ est donc décomposée en deux populations, dont la seconde tend vers zéro. Le théorème est établi.

Cas central. Dans ce cas, on pose

$$P_2 = r\cdot\left[\frac{1}{3}\right] + s\cdot\left[\frac{2}{3}\right],$$

et les populations successives deviennent

$$\begin{aligned} P_2' = &\left(\frac{2}{9}r^2 + \frac{1}{9}rs\right)\cdot\left[\frac{0}{3}\right] \\ &+\left(\frac{5}{9}r^2 + \frac{8}{9}rs + \frac{2}{9}s^2\right)\cdot\left[\frac{1}{3}\right] \\ &+\left(\frac{2}{9}r^2 + \frac{8}{9}rs + \frac{5}{9}s^2\right)\cdot\left[\frac{2}{3}\right] \\ &+\left(\frac{1}{9}rs + \frac{2}{9}s^2\right)\cdot\left[\frac{3}{3}\right] \quad \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2^{(m)} = &\left(\frac{2}{3}r + \frac{1}{3}s\right)^3\cdot\left[\frac{0}{3}\right] + 3\cdot\left(\frac{2}{3}r + \frac{1}{3}s\right)^2\left(\frac{1}{3}r + \frac{2}{3}s\right)\cdot\left[\frac{1}{3}\right] + \\ &+3\cdot\left(\frac{2}{3}r + \frac{1}{3}s\right)\left(\frac{1}{3}r + \frac{2}{3}s\right)^2\cdot\left[\frac{2}{3}\right] + \left(\frac{1}{3}r + \frac{2}{3}s\right)^3\cdot\left[\frac{3}{3}\right] \\ &-3^{-m-2}\Big\{(2r^3 + 3r^2s + 3rs^2 + s^3)\cdot\left[\frac{0}{3}\right] \\ &-3r\,(r^2 + rs + s^2)\cdot\left[\frac{1}{3}\right] \\ &-3s\,(r^2 + rs + s^2)\cdot\left[\frac{2}{3}\right] \\ &+(r^3 + 3r^2s + 3rs^2 + 2s^3)\cdot\left[\frac{3}{3}\right]\Big\},\ (m \geqq 2). \end{aligned}$$

Le résultat est donc analogue au précédent, et le théoréme subsiste aussi pour ce cas.

Cas symétrique. Posons enfin

$$P_3 = p\cdot\left[\frac{0}{3}\right] + r\cdot\left[\frac{1}{3}\right] + r\cdot\left[\frac{2}{3}\right] + p\cdot\left[\frac{3}{3}\right].$$

Digitized by Google

Pour le rapport

$$\varrho^{(m)} = \frac{p_1^{(m)}}{p_0^{(m)}} = \frac{p_2^{(m)}}{p_3^{(m)}}$$

on obtient la relation récurrente

$$\varrho^{(m)} = \frac{3 + 5\,\varrho^{(m-1)}}{3 + \varrho^{(m-1)}}$$

ou encore

$$\frac{\varrho^{(m)} - 3}{\varrho^{(m)} + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\varrho^{(m-1)} - 3}{\varrho^{(m-1)} + 1},$$

donc

$$\frac{\varrho^{(m)} - 3}{\varrho^{(m)} + 1} = \frac{1}{3^m} \cdot \frac{\varrho - 3}{\varrho + 1} = \frac{1}{3^m} \cdot \frac{r - 3p}{r + p} = \frac{8r - 3}{3^m}.$$

Faisant tendre m vers l'infini, on voit que

$$\varrho^{(m)} \to 3,$$

ou

$$\mathrm{P}^{(m)} \to \frac{1}{8}\left[\frac{0}{3}\right] + \frac{3}{8} \cdot \left[\frac{1}{3}\right] + \frac{3}{8} \cdot \left[\frac{2}{3}\right] + \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{3}{3}\right].$$

Le théorème est donc démontré.

Dans le cas général, si la suite des $\mathrm{P}^{(m)}$ a une limite définie, $\mathrm{P}^{(\omega)}$, on a

$$\mathrm{P}^{(m+1)} = \mathrm{P}^{(m)\odot 2\odot}$$

et par conséquent

$$\lim \mathrm{P}^{(m+1)} = (\lim \mathrm{P}^{(m)})^{\odot 2\odot}$$

ou

$$\mathrm{P}^{(\omega)} = \mathrm{P}^{(\omega)\odot 2\odot}.$$

Alors, les nombres $p_\lambda^{(\omega)}$ forment une solution positive du système d'équations suivant

$$p_\lambda^{(\omega)} = \sum_{\mu,\nu=0}^{n} \pi_{\mu\nu}^{(\lambda)}\, p_\mu^{(\omega)}\, p_\nu^{(\omega)}, (\lambda = 0, 1, 2 \ldots n).$$

Or on sait que pour tout nombre $w < 1$ les nombres $b_\lambda = \binom{n}{\lambda} w^{n-\lambda} (1 - w)^\lambda$ sont une solution de ce système. On ne sait ni s'il y en a d'autres, ni quelles valeurs de w qu'il faut choisir pour obtenir une solution de notre problème d'itération.

Digitized by Google

SEMI-INVARIANTS DE THIELE ET MOMENTS D'ORDRE SUPÉRIEUR

PAR

RAGNAR FRISCH

Le sujet dont j'aurai l'honneur de dire quelques mots appartient à une partie des mathématiques appliquées: la théorie mathématique des observations, qui pour une grande part doit son développement à des investigateurs danois. Les pionniers de cette théorie furent Oppermann, Thiele et Gram. Et l'oeuvre commencée par eux fût continuée et développée par leurs disciples et successeurs.

Qu'il me soit permis de rappeler d'abord quelques notions fondamentales.

Soit x un phénomène d'observation qui peut assumer une des valeurs $x_0 x_1 \dots x$. Une suite d'observations étant faite, si l'on a trouvé pour $x_0 x_1 \dots x_s$ les fréquences relatives $R_0 R_1 \dots R_s$, on appelle *distribution empirique* de x la suite des couples de valeurs

$$\begin{matrix} x_0 \, R_0 \\ x_1 \, R_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_s \, R_s . \end{matrix} \tag{1}$$

Si l'on peut assigner *a priori* aux valeurs $x_0 x_1 \dots x_s$ des probabilités données $P_0 P_1 \dots P_s$, on appelle *distribution théorique* de x la suite des couples de valeurs

$$\begin{matrix} x_0 \, P_0 \\ x_1 \, P_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x \ P_s . \end{matrix} \tag{2}$$

Digitized by Google

S'il s'agit d'un phénomène qui est capable d'une variation continue, on aura à considérer au lieu de la suite (1) ou (2) une fonction continue de distribution ou de probabilité. Le raisonnement sera sous beaucoup de rapports le même pour les distributions continues et les distributions discontinues. Pour fixer les idées, je vais considérer une distribution discontinue. D'une façon analogue on peut définir la distribution d'un phénomène qui est caractérisé, non plus par un seul caractère, mais par plusieurs; mais je n'y insiste pas.

Au lieu d'étudier les nombres R, respectivement P, on cherche souvent à caractériser la distribution en question par un système de paramètres. On peut évidemment construire une infinité de tels systèmes capables d'exprimer toutes les particularités de la distribution considérée. Les plus importants de ces systèmes sont les moments, les semi-invariants introduits par Thiele, et les moments factoriels introduits par M. Steffensen.

Le moment d'ordre h d'une distribution théorique est défini

$$m_h(x-a) = \sum_{\nu=0}^{s} (x_\nu - a)^h P_\nu$$

où a est une certaine constante qui désigne le point autour duquel le moment est pris.

D'une façon analogue le moment factoriel d'ordre h est défini

$$m_{(h)}(x-a) = \sum_{\nu=0}^{s} (x_\nu - a)^{(h)} P_\nu$$

où

$$(x_\nu - a)^{(h)} = (x_\nu - a)(x_\nu - a - 1) \ldots (x_\nu - a - h + 1).$$

En particulier on désigne les moments et les moments factoriels pris autours de l'origine

$$m_h = \sum_{\nu=0}^{s} x_\nu^{(h)} P_\nu$$

$$m_{(h)} = \sum_{\nu=0}^{s} x_\nu^{(h)} P_\nu .$$

Les moments moyens et les moments factoriels moyens, c'est-à-dire les moments et les moments factoriels pris autour de la moyenne m_1 sont désignés

$$\mu_h = \sum_{\nu=0}^{s} (x_\nu - m_1)^h P_\nu$$

Digitized by Google

$$\mu_{(h)} = \sum_{\nu=0}^{s} (x_\nu - m_1)^{(h)} P_\nu .$$

Enfin les semi-invariants λ_h sont définis par l'identité formelle en t

$$e^{\sum_{h=0}^{\infty} \lambda_h \frac{t^h}{h!}} = \sum_{\nu=0}^{s} e^{x_\nu t} P_\nu .$$

Puisque $\sum_{\nu=0}^{s} P_\nu = 1$ on a par définition

$$m_0 = m_{(0)} = \mu_0 = \mu_{(0)} = 1 \qquad \lambda_0 = 0$$
$$m_1 = m_{(1)} = \lambda_1 \qquad \mu_1 = \mu_{(1)} = 0.$$

S'il s'agit d'une distribution empirique on n'a qu'à remplacer P par R pour avoir la définition des moments, des moments factoriels et des semi-invariants. Et dans le cas d'une distribution par partis continue on aura à remplacer le signe Σ par le signe $\int$ pris dans le sens de M. Stieltjes.

Très souvent, on se borne à considérer quelques-uns des premiers paramètres λ, μ et m; par exemple les paramètres d'ordre 0 jusqu'à 4. La raison peut en être: ou que le problème considéré est assez simple pour qu'il suffise de considérer les premiers paramètres, ou bien que l'on rencontre de telles difficultés dans le maniment des paramètres d'ordre supérieur, que l'on renonce à donner une solution complète du problème considéré. Ces difficultés peuvent être de différentes espèces. Quand il s'agit d'une distribution théorique, la difficulté est d'ordre algébrique. Le plus souvent c'est la difficulté d'obtenir une expression maniable pour les paramètres de la distribution en fonction des paramètres qui caractérise le schéma de réalisation dont la distribution considérée est le résultat.

Dans la suite je me permettra de présenter quelques résultats relatives aux problèmes que l'on rencontre dans l'ordre d'études ou interviennent des moments, des moments factoriels et des semi-invariants d'ordre supérieur. Pour plus de détails, je renvoie à un travail qui va être publié.

Quand on cherche à obtenir des formules de transformation entre les moments, les moments fatoriels et les semi-invariants d'un ordre quelconque, on est amené à considérer une classe de coëfficients numériques et de polynomes qui interviennent aussi dans l'étude de beaucoup d'autres problèmes de nature très variée.

Digitized by Google

Les fonctions symétriques élémentaires des nombres naturels $S_k(1, 2, \ldots n)$, les différences de zéro $\Delta^n 0^k$, les dérivées de zéro et d'autres coëfficients et polynomes analogues, appartiennent par exemple à cette classe.

La notation de ces nombres et polynomes ainsi que les méthodes par lesquelles ils sont traités, sont très différentes chez les différents auteurs.

En voici quelques exemples

Auteurs	Notation	Signification
M. Ocagne	K_k^n ou $[1_n]^{k-n}$	$\frac{\Delta^n 0^k}{n!}$
»	S_n^k	$S_k(1, 2, \ldots n)$
MM. Selivanov & Andoyer	D_n^k	$\frac{\Delta^n 0^k}{k!}$
» »	E_n^k	$(-)^{n+k}\frac{n!}{k!} S_{k-n}(1, 2, \ldots (k-1))$
M. Steffensen	$\nabla^n 0^k$	$(-)^{n+k} \Delta^n 0^k$
»	$D^n 0^{(k)}$	$(-)^{n+k} n!\ S_{k-n}(1, 2, \ldots (k-1))$
M. Tschuprow	a_{kn}	$\frac{\Delta^n 0^k}{n!}$
»	β_{nk}	$S_k(1, 2, \ldots (n-1))$
M. N. Nielsen	$\mathfrak{A}_n^k$	$\Delta^n 0^k$
»	Θ_{n+1}^k	$\frac{\Delta^n 0^{n+k}}{n!}$
»	C_n^k	$S_k(1, 2, \ldots (n-1))$

Le manque d'uniformité dans la notation et dans la méthode est un fait très regrettable, qui dans bien des cas a été la cause de double emploi dans le travail des investigateurs. Il semble donc un véritable besoin de systématiser la notation. Cette systématisation est d'autant plus facile à réaliser, que tous les coëfficients cités ci-dessus, ainsi qu'un grand nombre de coëfficients et polynomes analogues peuvent être exprimés d'une façon simple à l'aide des nombres et des polynomes de Bernoulli généralisés, qui dans les travaux de M. Nörlund[1]) ont été traités d'une

[1]) Voir en particulier son »Mémoire sur les polynomes de Bernoulli« Acta Mathem. 43 (1920) et le traité »Differenzenrechnung«, Berlin 1924.

Digitized by Google

façon systématique et approfondie et dont la notation n'est qu'une extension de la notation universellement adoptée, des nombres de Bernoulli ordinaires.

A l'aide des nombres et polynomes B de M. Nörlund on peut démontrer les formules suivantes:

$$(3a) \qquad m_{(h)}(x-a) = \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} B_{h-i}^{(h+1)}(b-a+1)\, m_i(x-b)$$

$$(3b) \qquad m_h(x-a) = \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} B_{h-i}^{(-i)}(b-a)\, m_{(i)}(x-b).$$

La formule (3a) exprime le moment factoriel d'un ordre quelconque h pris autour d'un point quelconque a en fonction des moments d'ordre o jusqu'à h pris autour d'un autre point quelconque b.

La formule (3b) exprime d'une façon analogue le moment d'un ordre quelconque en fonction des moments factoriels.

Les formules montrent que si les moments et les moments factoriels sont pris autour d'un même point, il suffit de faire intervenir les nombres B, sinon, il faut avoir recours aux polynomes B.

Donnant à a et b des valeurs particulières on obtient des formules pour les moments et les moments factoriels pris autour de l'origine, ainsi que des formules pour les moments et les moments factoriels moyens.

Les formule (3a) et (3 b) sont comme on le voit, linéaires et homogènes. Les formules de transformation entre les moments et les semi-invariants ne sont plus aussi simples. On trouve par exemple

$$(4) \qquad \frac{m_h}{h!} = \sum_{(i)} \frac{1}{i_1!\, i_2! \ldots i_h!} \left(\frac{\lambda_1}{1!}\right)^{i_1} \left(\frac{\lambda_2}{2!}\right)^{i_2} \cdots \left(\frac{\lambda_h}{h!}\right)^{i_h}$$

ou la sommation (i) doit être étendue à tous les entiers non négatifs $i_1\, i_2 \ldots i_h$ satisfaisant à

$$1 \geqq i_1 + i_2 + \ldots + i_h \geqq h$$
$$1\, i_1 + 2\, i_2 + \ldots + h\, i_h = h$$

Une formule analogue fait connaître les semi-invariants en fonction des moments. On peut démontrer que l'on obtient l'expression des moments moyens simplement en faisant $\lambda_1 = 0$ dans (4). De plus on peut démontrer que l'on obtient l'expres-

Digitized by Google

sion des coëfficients C_h qui interviennent dans le développement d'un fonction de distribution arbitraire suivant les dérivées de $e^{-\frac{x^2}{2}}$, en faisant dans (4) non seulement $\lambda_1 = 0$ mais aussi $\lambda_2 = 0$, l'origine et l'unité de mesure des observations étant choisies de façon à rendre $m_1 = 0$, $m_2 = 1$.

L'avantage des formules (3) et (4) et des formules analogues, consiste principalement en ce que dans chaque cas particulier on peut prendre comme point de départ le système de paramétres dont l'expression est la plus simple, et ensuite au besoin, passer aux autres systèmes par les formules (3) et (4) et les formules analogues.

Comme exemple d'une telle application considérons la distribution binomiale. C'est la distribution d'une variable fortuite qui peut assumer les valeurs $\nu = 0, 1, \ldots s$ avec les probabilités $P_\nu = \binom{s}{\nu} p^\nu q^{s-\nu}$ ou p désigne une probabilité élémentaire et $q = 1 - p$ la probabilité contraire.

Ici l'expression des moments factoriels est très simple. Comme l'a démontré M. Steffensen[1]) on a

$$m_{(h)} = s^{(h)} p^h$$

où

$$s^{(h)} = s(s-1) \ldots (s-h+1)$$

Appliquant la formule (3b) on obtient après quelques transformations des polynomes B qui y figurent

$$\mu_h = \sum_{j=1}^{\text{Ent.}\left(\frac{h}{2}\right)} \sum_{k=j}^{h} E_{hjk}\, s^j\, p^k. \tag{5}$$

Les coëfficients numériques E_{hjk} sont exprimés par les nombres B ainsi

$$E_{hjk} = (-)^k j \binom{k}{j} \binom{h}{k} \sum_{i=k-j+1}^{k} \frac{(-)^i}{i} \binom{j-1}{k-i} B_{h-k}^{(-i)} B_{k-j}^{(i)}.$$

La formule (5) peut encore être simplifiée. En effect on peut démontrer que μ_h considéré comme polynome en p satisfait à l'égalité

$$\mu_h(1-p) = (-)^h \mu_h(p).$$

---

[1]) *Skandinavisk Aktuarietidskrift* 6 (1923) p. 77.

Digitized by Google

Comme fonction de $\delta = q - p$, μ_h est donc de la même parité que l'indice h. Par conséquence les moments moyens d'ordre pair peuvent être experimés comme un polynome en s et $r = pq$, tandis que les moments moyens d'ordre impair peuvent être exprimés comme le produit par $(q - p)$ d'un polynome en s et r.

Ces derniers développements contiennent un nombre de termes beaucoup plus restreint que la formule (5) et les nouveaux coëfficients peuvent encore être exprimés d'une façon indépendante à l'aide des nombres B.

Pour le calcul numérique de ces coëfficients on cherchera des formules récurrentes, ainsi que des formules de contrôle. Des formules récurrentes, pour les coëfficients peuvent être développées à l'aide des formules recurrentes de Pearson et de Bohlmann-Romanovsky[1]), pour les moments moyens eux-mêmes. A l'aide d'une généralisation de la formule de Pearson que j'ai donné dans un article de *Biometrika*[2]) on peut démontrer les formules de contrôle que voici:

Si on désigne par S_h la somme de tous les coëfficients qui figurent dans le développement de μ_h suivant les puissances de s et r, S_h est égal à un des six nombres suivants:

$$1, 0, 1, 1, -2, -1$$

d'après le caractère résiduel de l'indice h(mod. 6).

Désignons encore par M_h la somme de tous les produits que l'on obtient en multipliant chaque coëfficient du développement de μ_h par la somme des indices de ce coëfficient. M_h sera donc une espèce de »moment« relativement à la suite des coëfficients qui figurent dans le développement de μ_h. M_h étant définie ainsi, on peut démontrer que M_h a une des six valeurs suivantes

$$h, \frac{h-1}{3}, 1, \frac{h}{3}, -(h+1), -\frac{2h-1}{3}$$

d'après le caractère résiduel de l'indice h(mod. 6).

Pour les semi-invariants d'un ordre quelconque de la distribution binomiale on peut aussi donner l'expression indépendante[3]). Mais je n'y insiste pas. J'indiquerai seulement une

---

[1]) *Biometrika* Vol. XV (1923) p. 410 et Vol. XVI (1924) p. 159. *Jahresbericht d. deutschen Mathem. Ver.* Bd. XXVII (1918) p. 73.

[2]) Vol. XVII (1925) p. 165.

[3]) *Comptes Rendus* (Paris). Séance du 17. août 1925.

Digitized by Google

formule récurrente assez simple, à laquelle satisfont ces semi-invariants. On a

$$\lambda_h = pq \frac{d}{dp} \lambda_{h-1}.$$

C'est à dire, le semi-invariant d'un ordre quelconque est égal au produit de pq par la dérivée par rapport à p du semi-invariant précédent.

Avant de terminer je me permettra de dire quelques mots sur les moments *incomplets* de la distribution binomiale.

Le moment moyen incomplet d'ordre h de cette distribution est défini

$$\mu_h = \sum_{\nu=t}^{s} (\nu - sp)^h P_\nu \qquad P_\nu = \binom{s}{\nu} p^\nu q^{s-\nu}$$

où la limite inférieure de sommation t est un quelconque des nombres $0, 1, \ldots s$. Le problème de trouver une expression pour ces moments est naturellement beaucoup plus complexe que le problème analogue pour les moments complets. Si on se borne à considérer des expressions algébriques, on ne connaît actuellement que l'expression d'un seul moment incomplet, c'est l'expression du moment incomplet d'ordre un. Pour ce moment on a

$$\mu_1 = s \binom{s-1}{t-1} p^t q^{s-t+1}. \tag{6}$$

Pour la démonstration de cette formule je renvoie à un article dans le *Skandinavisk Aktuarietidskrift*[1]).

Si l'on envisage des expressions plus complexes, on connaît aussi une expression du moment incomplet d'ordre zéro. C'est une expression sous forme d'une intégrale. *M. Pearson* a obtenu la formule[2])

$$\mu_0 = s \binom{s-1}{t-1} \int_0^p x^{t-1} (1-x)^{s-t} \, dx \qquad (0 < t)$$

---

[1]) 7 (1924) p. 167. Voir aussi *Comptes Rendus* (Paris). Séance du 17. novembre 1924.

[2]) *Biometrika* Vol. XVI (1924) p. 202. Voir aussi la note de M. *Camp* l. c. p. 171 ainsi que *Laplace:* Œuvres, Tome 7ième p. 153.

Digitized by Google

μ_0 peut donc être exprimé à l'aide de la fonction B incomplète. La formule de M. Pearson est un moyen d'evaluer numériquement μ_0 quand s et p sont des quantités données, mais la formule net peut servir à obtenir une expression explicite de μ_0.

Le problème d'obtenir une expression simple de μ_0 contient en réalité la clef des moments incomplets d'ordre supérieur. En effet on connaît[1]) des formules récurrentes qui ne supposent connus que deux moments incomplets, et μ_1 est donné par (6).

On se rend compte en même temps de l'importance et de la difficulté du problème en faisant remarquer que le problème d'obtenir une expression pour μ_0 est équivalent au problème classique de trouver la probabilité pour qu'un évènement dont la probabilité est p, en s épreuves se produise un nombre de fois compris entre t_1 et t_2, problème dont *Laplace* a donné la solution asymptotique à l'aide de la fonction

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

On peut développer plusieurs relations assez intéressantes auxquelles satisfait μ_0, et qui pourront peut-être servir à attaquer le problème. Si l'on désigne la quantité cherchée par R_{st} pour mettre en évidence le fait qu'elle dépende à la fois de s et t, on peut par exemple mettre la fonction génératrice de μ_0 sous les formes

$$\frac{1}{1-x}\left(\frac{px}{1-qx}\right)^t = \sum_{s=0}^{\infty} R_{st}\, x^s \qquad |x| < 1$$

$$\frac{y}{1-y}(1-(q+py)^s) = \sum_{t=1}^{s} R_{st}\, y^t \qquad |y| < 1$$

$$\frac{(1-qx)}{(1-x)(1-pxy-qx)} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{s} R_{st}\, x^s\, y^t \qquad R_{00} = 1$$

On peut aussi démontrer que R_{st} qui par définition est la somme de $P_{st} = \binom{s}{t} p^t q^{s-t}$ la sommation étant étendue au deuxième indice t, est égal au produit de p par la somme de la même expression, la sommation étant étendue au premier indice s, et t étant remplacé par $(t\text{-}1)$.

On peut aussi à priori se faire une certaine idée du caractère

[1]) *Biometrika* Vol. XVII (1925) p. 165 et suiv.

Digitized by Google

de μ_0 comme fonction de p. En effet μ_0 et μ_1 sont des polynomes en p de degré s et $(s+1)$ respectivement. Les zéros de μ_1 sont très simples, à savoir $p = o$ de multiplicité t et $p = 1$ de multiplicite $s - t + 1$, ce que l'on voit par (6). Les zéros de μ_0 sont loin d'être aussi simples. En effet on a

$$\mu_0 = R_{st} = p^t M_{s-t,\, t-1}(q)$$

ou $M_{nh}(x)$ est le polynome suivant en x

$$M_{nh}(x) = 1 + \binom{h+1}{1} x + \binom{h+2}{2} x^2 + \ldots + \binom{h+n}{n} x^n .$$

On peut démontrer que ce polynome a autant que possible de ces zéros complexes, c'est-à-dire n si n est pair et $(n-1)$ si n est impair.

Par conséquence, il n'est pas possible de trouver une expression pour μ_0 tout-à-fait analogue à l'expression de μ_1. Mais il sera peut-être possible d'exprimer μ_0 comme la somme d'un petit nombre de termes dont chacun était une puissance ou une factorielle en p ou q. Une telle expression sera d'un très grand intérêt, non seulement au point de vue de la théorie, mais aussi au point de vue des applications. Une fois en possession d'une telle expression on ne serait plus dans la nécessité de remplacer dans les applications la distribution binomiale par une distribution continue, et d'appliquer le théorême de Laplace. Dans beaucoup de cas ce procédé ne donne pas de résultats satisfaisants, surtout si le nombre des observations n'est pas considérable.

Digitized by Google

ON THE ACCURACY OF INTERPOLATION

BY

I. LEHMANN

When Newton's interpolation formula and the formulae derived therefrom are being used for interpolation, numerical integration and summation, it is on the assumption that the function considered is a polynomial or with sufficient accuracy can be represented by a polynomial coinciding with the function at some given points. As a rule the differences of the function are supposed to give sufficient evidence as to whether this is so. Whittaker, in his »Theory of Observations« says: »It will be found that in the case of practically all tabular functions the differences of a certain order are all zero; or to speak more accurately, they are smaller than one unit in the last decimal place retained in the table in question. This fact lies at the basis of the method of interpolation ..... «, it being taken for granted that the function can be represented by a polynomial of the order of the last differences. And as a rule it is so. It is however not necessarily the case. In order to make interpolation of a certain order permissible, it is therefore strictly speaking not sufficient to choose the tabular values of the function so that the differences of the following order are zero. Something more must be known of the function in the considered interval. We shall now see how in the case of many of the usually occurring functions such further knowledge is readily obtained.

$f(x)$ being any function of x, *defined* for all occurring arguments, we have the identical expression:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & f(a_0) + (x - a_0) f(a_0, a_1) + \ldots\ldots \\ & + (x - a_0)(x - a_1)\ldots(x - a_{n-1}) f(a_0, a_1 \ldots a_n) \\ & + (x - a_0)(x - a_1)\ldots(x - a_n) f(a_0, a_1, \ldots a_n, x). \end{aligned} \tag{1}$$

Supposing the numbers $f(a_i$ to be tabulated, the right hand side

Digitized by Google

with the exception of the last term may be computed; if the value thus found be substituted for $f(x)$, the error involved is:

$$R = (x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_n) f(a_0, a_1 \ldots a_n, x) \qquad (2)$$

In order to find limits to this expression we must consider the divided difference $f(a_0, a_1 \ldots a_n, x)$. This being a divided difference of the order $n + 1$, we shall now assume that *all the divided differences of $f(x)$ of the $(n + 2)^{nd}$ order are of the same sign*, say positive, in the interval considered. From this assumption it follows that $f(a_0, a_1 \ldots a_n, x)$ is a monotonic function of x, increasing throughout the interval. For

$$\frac{f(a_0, a_1 \ldots a_n, x) - f(a_0, a_1 \ldots a_n, y)}{x - y} = f(a_0, a_1 \ldots a_n, x, y) > 0. \qquad (3)$$

Hence if

$$b_0 < x < b_1$$

then

$$f(a_0, a_1 \ldots a_n, b_0) < f(a_0, a_1 \ldots a_n, x) < f(a_0, a_1 \ldots a_n, b_1) \qquad (4)$$

which places the unknown divided difference $f(a_0, a_1 \ldots a_n, x)$ within the limits of two known divided differences, supposing $f(x)$ to be known at the points b_0 and b_1. Substituting the one or the other of these two divided differences for $f(a_0, a_1 \ldots a_n, x)$ in (1), we obtain two approximate values of $f(x)$. If they are equal, as may well be the case even if $f(a_0, a_1 \ldots a_n, b_0)$ and $f(a_0, a_1 \ldots a_n, b_1)$ differ slightly, $f(x)$ has been determined correctly to the number of figures of the tabular values. If they differ, their common figures are correct.

To be able to apply what is here stated in any given case we must have means of investigating the sign of the divided differences of the function in question. This, as a rule, cannot be done directly. We shall therefore introduce the assumption that the function $f(x)$ possesses differential coefficients of any required order.

If the differential coefficients of a certain order have a constant sign throughout an interval, the divided differences of this order with all their arguments within the interval have the same sign. Therefore, if

$$f^{n+2}(x) > 0 \qquad (5)$$

within a certain interval, all the divided differences of the $(n + 2)^{nd}$ order are also positive.

Digitized by Google

In the case of a table of equal intervals it is thus seen that: *If the differences of a certain order are all »zero« and if the differential coefficients of this order are of constant sign throughout the interval considered, an interpolation using »all« the differences of the table will lead to the correct result* — correct as a rule meaning nothing more than correct to a certain number of figures, viz. that of the tabular values of the function.

If the interpolation is not carried on till the »zero« differences are reached, limits may be found to the error involved by means of the differences, as described above. In the central difference notation we have

$$\frac{\delta^{2k} f(0)}{(2k)!} < f(0, \pm 1 \ldots \pm (k-1), k, x) < \frac{\delta^{2k} f(1)}{(2k)!} \qquad (6a)$$

for $-k < x < k+1$, or

$$\frac{\delta^{2k+1} f(-\frac{1}{2})}{(2k+1)!} < f(0, \pm 1 \ldots \pm k, x) < \frac{\delta^{2k+1} f(\frac{1}{2})}{(2k+1)!} \qquad (6b)$$

for $-k-1 < x < k+1$, the limits being found by substituting for x in the divided difference in the first case $-k$ and $k+1$, in the second case $-(k+1)$ and $k+1$. (6*a*) and (6*b*) may be used for the remainder of the Gauss'ian zigzag formula and are also available in the case of Bessel's and Stirling's formulae respectively. If forward differences are used, we have for $1 - < x < n+1$

$$\frac{\Delta^{n+1} f(-1)}{(n+1)!} < f(0, 1, 2 \ldots n, x) < \frac{\Delta^{n+1} f(0)}{(n+1)!} \qquad (7)$$

The assumption being, in all three cases, that the divided differences of the order following the one here considered are *positive.*

An example may serve to illustrate the value of the condition (5).

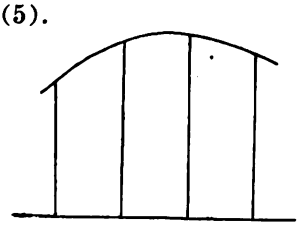


fig. 1 a.

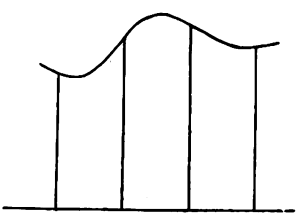


fig. 1 b.

Digitized by Google

The ordinates indicated in the figures correspond to the tabulated values of two functions; they are the same. The 3rd order difference is »zero« so that 2nd order interpolation seems permissible. It is so in the first case, where $f^{(3)}(x)$ is of constant sign throughout the interval, but not in the second; $f^{(3)}(x)$ changes its sign, and therefore the divided differences of the 2nd order for 2 of the tabular points and one 3rd point may take values differing considerably from the 2nd order divided differences of the tabulated numbers.

It is however possible to ascertain the accuracy of a result of an interpolation using »all« the differences of a table also in such cases where there is a change of sign in the differential coefficients of the order of the first »zero« differences.

For, if the differences of the following order are also »zero« differences, it is sufficient that the corresponding differential coefficients should be of constant sign throughout the interval employed in an interpolation of this order. And so on. Only in such cases where there is a change of sign in the differential coefficients for many successive orders, it cannot by this method be ascertained if the result can be trusted.

It will therefore be understood — as it is also proved by experience — that in most cases where the tabular values of a function are so chosen that the differences of a certain order are »zero«, interpolation using all the differences of the table will lead to the correct result. For some of the functions that are often dealt with in practical computation this is always the case, because their differential coefficients of any order are of constant sign. Such functions are the exponential and logarithmic functions; $a_{\overline{n}|}$, the annuity certain as a function of the rate of interest, may also be mentioned. In other cases the interval of interpolation naturally will be so chosen as not to include a change of sign in the differential coefficients of two successive orders; sine and cosine serve as examples.

It will be seen that the problem we have dealt with here is that of ascertaining whether the result of an interpolation is correct *if the tabular values of the function are fixed beforehand.* If for a given function we are to choose the intervals so as to make interpolation of a certain order satisfactory, other methods must be resorted to. We must in that case have means of estimating the approximate value of a divided difference of a certain order

Digitized by Google

and must hence avail ourselves of the fact, that

$$f(a_0, a_1 \ldots a_n, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

i. e. we must use the remainders of our formulae expressed in terms of differential coefficients.

These of course are also available in the case of the problem considered above. But it has been the object to show that it may be solved in a simpler way, and that in many cases very little extra work, if any at all, is required of the computor who wishes to be convinced of the trustworthiness of his results.

What applies to the interpolation formulae here dealt with applies equally to the formulae for numerical integration and summation therefrom derived, i. e. Laplace's and Gauss' formulae for numerical integration and the summation formulae of the Lubbock type. They are all derived in very much the same way; as an example we shall find a central difference formula of the Lubbock type, for an even number of subdivisions.

We have by Bessel's formula:

$$\begin{aligned} f\left(n+\frac{1}{2}+\frac{s}{2r}\right) = \square f\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{s}{2r}\right)^{[3]-1} \square \delta^2 f\left(n+\frac{1}{2}\right) + \\ \ldots\ldots + \frac{1}{(2k-2)!}\left(\frac{s}{2r}\right)^{[2k-1]-1} \square \delta^{2k-2} f\left(n+\frac{1}{2}\right) \\ + \frac{s}{2r}\delta f\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{s}{2r}\right)^{[3]} \delta^3 f\left(n+\frac{1}{2}\right) + \ldots\ldots \\ + \frac{1}{(2k-1)!}\left(\frac{s}{2r}\right)^{[2k-1]} \delta^{2k-1} f\left(n+\frac{1}{2}\right) + R_1 \qquad (8) \end{aligned}$$

$$R_1 = \left(\frac{s}{2r}\right)^{[2k+1]-1} f\left(n, n \pm 1 \ldots n \pm (k-1), n+k, n+\frac{1}{2}+\frac{s}{2r}\right). \qquad (9)$$

Assuming that the differential coefficient of $f(x)$ of the $(2k+1)^{st}$ order is positive in the interval containing all the considered points we have

$$\begin{aligned} \frac{\square \delta^{2k} f(n-\frac{1}{2})}{(2k)!} < f\left(n, n \pm 1 \ldots n \pm (k-1), n+k, n+\frac{1}{2}+\frac{s}{2r}\right) \\ < \frac{\square \delta^{2k} f(n+\frac{3}{2})}{(2k)!} \qquad (10) \end{aligned}$$

for $n-k < n+\frac{1}{2}+\frac{s}{2r} < n+k+1$.

Digitized by Google

Substituting for s the numbers from $-r$ to r successively and summing, we obtain

$$\sum_{s=-r}^{r-1} f\left(n+\frac{1}{2}+\frac{s}{2r}\right)+f(n+1)=(2r+1)\square f\left(n+\frac{1}{2}\right)$$
$$+\frac{1}{2!}\sum_{-r}^{r}\left(\frac{s}{2r}\right)^{[3]-1}\square\delta^2 f\left(n+\frac{1}{2}\right)+\ldots. \qquad (11)$$
$$+\frac{1}{(2k-2)!}\sum_{-r}^{r}\left(\frac{s}{2r}\right)^{[2k-1]-1}\square\delta^{2k-2}f\left(n+\frac{1}{2}\right)+R_2.$$

$$R_2=\sum_{s=-r}^{r}\left(\frac{s}{2r}\right)^{[2k+1]-1} f\left(n,\ n\pm 1\ldots n\pm(k-1),\ n+k,\ n+\frac{1}{2}+\frac{s}{2r}\right).$$

As $\left(\frac{s}{2r}\right)^{[2k+1]-1}$ does not change its sign when s varies from $-r$ to r, then because of (10) R_2 lies between the two numbers:

$$\frac{\square\delta^{2k}f(n-\frac{1}{2})}{(2k)!}\sum_{-r}^{r}\left(\frac{s}{2r}\right)^{[2k+1]-1} \text{ and } \frac{\square\delta^{2k}f(n+\frac{3}{2})}{(2k)!}\sum_{-r}^{r}\left(\frac{s}{2r}\right)^{[2k+1]-1}. \qquad (12)$$

If in (11) we substitute for n the values $0, 1 \ldots p-1$ and add the results, we find

$$\sum_{s=0}^{2rp-1} f\left(\frac{s}{2r}\right)=2r\sum_{\nu=0}^{p-1}f(\nu)+\left(r-\frac{1}{2}\right)\Big[f(x)\Big]_0^p$$
$$+\frac{1}{2!}\sum_{s=-r}^{r}\left(\frac{s}{2r}\right)^{[3]-1}\Big[\square\,\delta f(x)\Big]_0^p+\ldots. \qquad (13)$$
$$+\frac{1}{(2k-2)!}\sum_{s=-r}^{r}\left(\frac{s}{2r}\right)^{[2k-1]-1}\Big[\square\,\delta^{2k-3}f(x)\Big]_0^p+R$$

where R lies between the numbers

$$\frac{1}{(2k)!}\sum_{s=-r}^{r}\left(\frac{s}{2r}\right)^{[2k+1]-1}\Big[\square\,\delta^{2k-1}f(x)\Big]_{-1}^{p-1}$$

and

$$\frac{1}{(2k)!}\sum_{s=-r}^{r}\left(\frac{s}{2r}\right)^{[2k+1]-1}\Big[\square\,\delta^{2k-1}f(x)\Big]_{1}^{p+1}.$$

If the differences of the order $2k+1$ are »zero«, these two numbers are equal, and equal to

$$\frac{1}{(2k)!}\sum_{s=-r}^{r}\left(\frac{s}{2r}\right)^{[2k+1]-1}\Big[\square\,\delta^{2k-1}f(x)\Big]_0^p. \qquad (14)$$

Therefore, with (14) substituted for R, (13) will render the

Digitized by Google

correct result. As (14) is of the same shape as the terms in (13), it is seen that the required sum will be determined accurately by this formula if it uses »all« the differences of the given table — on the assumption that the differential coefficients of the order of the »zero« differences are of constant sign in the interval considered.

Digitized by Google

Digitized by Google

UNSERE KENNTNISSE ÜBER DIE BEWEGUNGSFORMEN IM DREIKÖRPERPROBLEM

MIT EINER TAFEL

VON

ELIS STRÖMGREN

Der Redner zeigte die Reproduktion einer für das Deutsche Museum in München angefertigten grossen Zeichnung in vier Farben vor, die die Hauptresultate der auf der Kopenhagener Sternwarte ausgeführten Arbeiten über das Dreikörperproblem, namentlich das s. g. *problème restreint*, darstellt. Die Originalzeichnung ist von dem Ingenieur *Otto Christensen* ausgeführt worden. Die dem vorliegenden Artikel beigegebene Tafel gibt eine verkleinerte einfarbige Reproduktion dieser Zeichnung wieder.

Die Tafel zerfällt in zwei Teile: *a.* die kleineren Figuren am Rande, die verschiedenen speziellen Bahnklassen, jede für sich und in verschiedenem Maasstabe, darstellend und *b.* die grosse zentrale Zeichnung, die eine Übersicht des ganzen Materials gibt und zwar für alle Bahnklassen im selben Maasstabe.

Die kleine Abb. 1 gibt die Definition des Hauptproblemes: des problème restreint mit zwei gleich grossen endlichen Massen m_1 und m_2 und den Librationspunkten L_1, L_2, L_3, L_4 und L_5.

Durch die übrigen Figuren werden die folgenden Bahnklassen in einem mit der Verbindungslinie m_1 m_2 drehenden Koordinatensysteme dargestellt:

Abb. 2: Retrograde periodische Bahnen um den Librationspunkt L_2.
Abb. 3: Retrograde periodische Bahnen um L_1.
Abb. 4: Direkte periodische Bahnen um m_2.
Abb. 5: Retrograde periodische Bahnen um m_2.
Abb. 6 und 7: Direkte periodische Bahnen um *beide* Massen m_1 und m_2.
Abb. 8 und 9: Retrograde periodische Bahnen um beide Mas-

Digitized by Google

sen m_1 und m_2, mit im *absoluten* Koordinatensysteme direkter Bewegung.

Abb. 10: Retrograde periodische Bahnen um beide Massen m_1 und m_2, mit im absoluten Koordinatensysteme retrograder Bewegung.

Abb. 11: Retrograde librations*ähnliche* periodische Bahnen, die in bezug auf die y-Achse unsymmetrisch verlaufen.

Abb. 12: Das System existierender periodischer Bahnen, die gleichzeitig *asymptotisch* zu L_4 und L_5 sind und teilweise zu den in Abb. 6, 8, 14 dargestellten Klassen in Beziehung stehen.

Abb. 13: S. unten.

Abb. 14: Eine zweite Klasse retrograder, librationsähnlicher periodischer Bahnen.

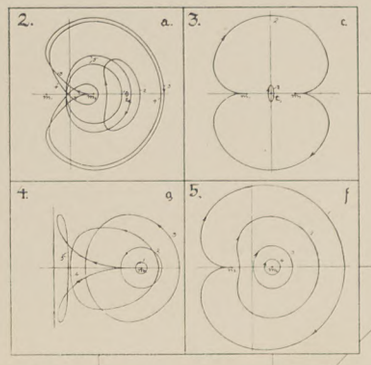
Abb. 13: Klassen periodischer Bahnen im allgemeineren Dreikörperprobleme (alle drei Massen endlich; in unserem Falle verhalten sich die drei Massen wie 1 : 2 : 1).

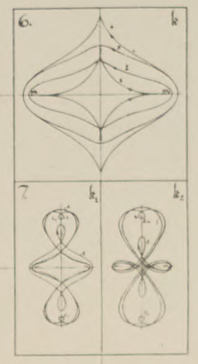
In bezug auf die ganze Problemstellung und die näheren Details sei auf einen im 4:ten Bande der »Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften« (Springer, Berlin 1925) veröffentlichten Artikel mit gleichnamigem Titel verwiesen (s. auch einen Artikel im Oktoberheft 1925 der »Nordisk Astronomisk Tidsskrift«).

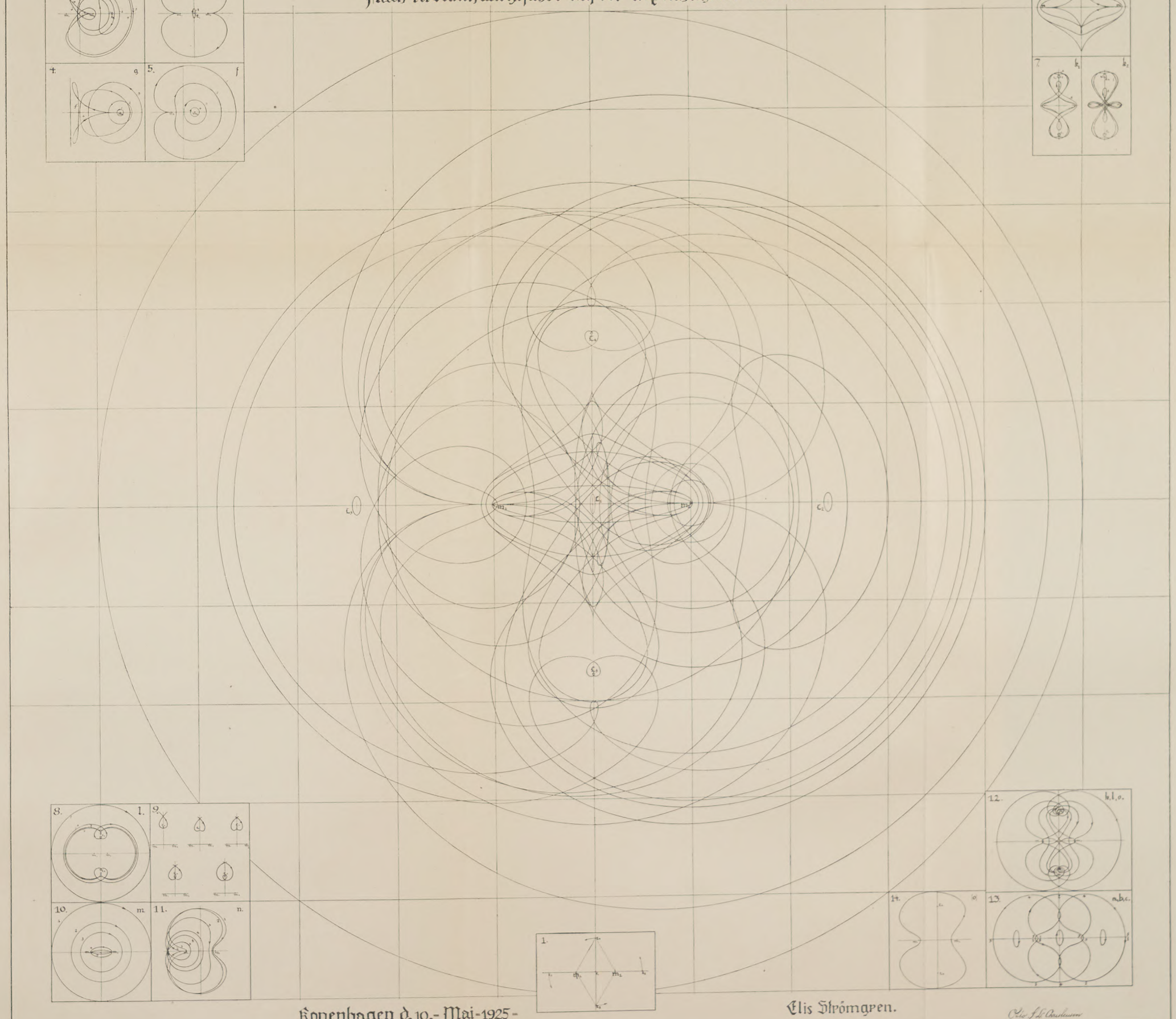
Digitized by Google

Bewegungsformen im Dreikörperproblem.

Nach Arbeiten, ausgeführt auf der Kopenhagener Sternwarte.







Kopenhagen d. 10.- Mai-1925-

Elis Strömgren.

Otto J. L. Christensen

Digitized by Google

sen m_1 und m_2, mit im *absoluten* Koordinatensysteme direkter Bewegung.

Abb. 10: Retrograde periodische Bahnen um beide Massen m_1 und m_2, mit im absoluten Koordinatensysteme retrograder Bewegung.

Abb. 11: Retrograde librations*ähnliche* periodische Bahnen, die in bezug auf die y-Achse unsymmetrisch verlaufen.

Abb. 12: Das System existierender periodischer Bahnen, die gleichzeitig *asymptotisch* zu L_4 und L_5 sind und teilweise zu den in Abb. 6, 8, 14 dargestellten Klassen in Beziehung stehen.

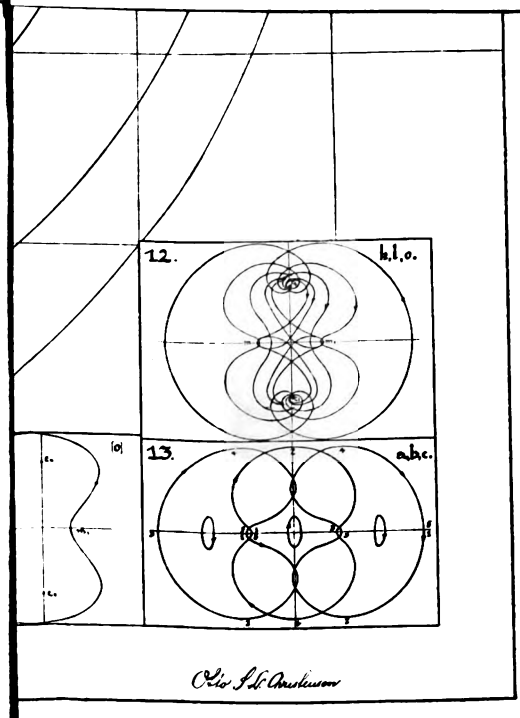
Abb. 13: S. unten.

Abb. 14: Eine zweite Klasse retrograder, librationsähnlicher periodischer Bahnen.

Abb. 13: Klassen periodischer Bahnen im allgemeineren Dreikörperprobleme (alle drei Massen endlich; in unserem Falle verhalten sich die drei Massen wie 1 : 2 : 1).

In bezug auf die ganze Problemstellung und die näheren Details sei auf einen im 4:ten Bande der »Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften« (Springer, Berlin 1925) veröffentlichten Artikel mit gleichnamigem Titel verwiesen (s. auch einen Artikel im Oktoberheft 1925 der »Nordisk Astronomisk Tidsskrift«).

Digitized by Google


12.
h.l.o.
13.
a.b.c.

Digitized by Google

SUR LA FORMATION DE CERTAINS GROUPES DE SUBSTITUTIONS

PAR

RICHARD BIRKELAND

1. Introduction. — On sait qu'on peut effectuer sur n lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, représentant n grandeurs indépendantes, des substitutions en nombres $1.2.\ldots. n = n!$ C'est un problème important de trouver tous les ensembles de substitutions qui forment des groupes. Les résultats obtenus, quand n est un nombre entier quelconque, ont trait seulement à des groupes spéciaux: par exemple des groupes linéaires et des groupes abéliens. Ici nous allons trouver des classes générales de groupes qui ne sont ni linéaires ni abéliens. Je les ai trouvés originellement en étudiant d'autres problèmes, mais je n'ai pas encore eu le temps d'achever des recherches qu'on peut développer considérablement.

Je me propose ici de trouver toutes les substitutions qui laisseraient invariables certaines fonctions qui entrent dans la classe

$$\varphi = \sum_i x_i^l x_{\varkappa_i}^m \ldots x_{\lambda_i}^p$$

la somme $\sum_i$ étant effectuée sur les indices $i, \varkappa_i, \ldots, \lambda_i$ en donnant à ces indices des systèmes de valeurs choisis entre les n nombres entiers $1, 2\ldots., n$. Les exposants $l, m, \ldots, p$ sont des nombres entiers indépendants de la lettre de sommation i.

2. Des nombres caractéristiques. — Désignons par $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ une permutation quelconque des nombres $1, 2, \ldots, n$. Avec ces nombres θ nous voulons opérer d'une manière qui au fond est connue de la théorie de substitutions quand on veut décomposer une substitution en substitutions

Digitized by Google

circulaires. Mais nous choisissons une forme nécessaire pour nos recherches.

Soit s un des nombres $1, 2, \ldots, n$. θ_s sera aussi un de ces nombres, donc θ_{θ_s} le sera aussi, $\theta_{\theta_{\theta_s}}$, ... le sera également et ainsi de suite en répétant l'opération un certain nombre de fois. Soit pour abréger

$$\theta_s^{(0)} = s, \quad \theta_s^{(k)} = \theta_{\theta_s^{(k-1)}} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{a}$$

On aura une série de nombres

$$s, \theta_s, \theta_s^{(2)}, \ldots, \theta_s^{(k)}, \ldots . \tag{b}$$

(où l'indice de θ est donné par le nombre précédent) qui tous seront parmi les nombres $1, 2, \ldots, n$. La série 2 (b) aura une infinité de termes; il faut donc que plusieurs nombres de la série soient egaux entre eux. Supposons donc

$$\theta_s^{(\alpha+p)} = \theta_s^{(p)} \tag{c}$$

d'où

$$\theta_s^{(\alpha+p-1)} = \theta_s^{(p-1)}$$

car un indice α de θ détermine θ_α complètement. En continuant de cette manière nous obtenons

$$\theta_s^{(\alpha)} = \theta_s^{(0)} = s \tag{d}$$

où l'on peut supposer que α ait la plus petite valeur possible, ainsi que tous les nombres

$$\theta_s^{(0)}, \theta_s^{(1)}, \theta_s^{(2)}, \ldots, \theta_s^{(\alpha-1)} \tag{e}$$

seront differents entre eux. La formule 2 (c) fait voir qu' à partir du terme $\theta_s^{(\alpha-1)}$ les termes de la suite 2 (b) se reproduiront dans le même ordre. Les α nombres 2 (e) seront donc les seuls de la série 2 (b) à être différents les uns des autres. Nous dirons que α sera le nombre *caractéristique* d'un des nombres 2 (e) par rapport à la suite donné $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$. Les nombres 2 (e) forment ce que nous appellerons une *ligne* caractéristique.

Ceci posé. Si on a $\alpha < n$, on prendra j pour un des nombres $1, 2, \ldots, n$ différent des nombres 2 (e) et on désigne par μ le

Digitized by Google

nombre caractéristique correspondant à j et à la suite des nombres $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$. Les μ nombres

(f) $$\theta_j^{(0)}, \theta_j^{(1)}, \theta_j^{(2)}, \ldots, \theta_j^{(\mu-1)}$$

sont différents entre eux. Il sont aussi différents des nombres 2(e). En effet, si l'on avait

$$\theta_j^{(h)} = \theta_s^{(k)}$$

il en résulterait

$$\theta_j^{(h-1)} = \theta_s^{(k-1)}, \ldots, \theta_j^{(0)} = \theta_s^{(k-h)}$$

c'est à dire que j serait contenu dans la suite 2(e), ce qui est contraire à l'hypothèse. Si on a $\alpha + \mu < n$, on prendra t pour un des nombres $1, 2, \ldots, n$ différent des nombres 2(e) et (f). Soit δ le nombre caractéristique correspondant à t et à la suite des θ. On aura une nouvelle suite de nombres

(g) $$\theta_t^{(0)}, \theta_t^{(1)}, \theta_t^{(2)}, \ldots, \theta_t^{(\delta-1)}$$

qui sont différents et entre eux et des nombres 2(e) et (f). On continuera ce procédé jusqu'à ce que tous les nombres $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ soient divisés en lignes caractéristiques 2(e), (f), (g),... L'ensemble de ces lignes forment le *tableau* caractéristique des nombres $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$. Pour une suite donnée de nombres θ les nombres caractéristiques sont déterminés d'une manière unique; seulement la succession en peut varier.

Supposons qu'il existe A nombres caractéristiques égaux à α (Nous dirons que α est de multiplicité A), M égaux à $\mu, \ldots,$ N égaux à ν. Nous avons alors

(h) $$A\alpha + M\mu + \ldots + N\nu = n$$

et on peut écrire le tableau caractéristique correspondant

(i)
$$\begin{array}{ll}
\theta_{s_t}^{(0)}, \theta_{s_t}^{(1)}, \ldots, \theta_{s_t}^{(\alpha-1)} & (t = 1, 2, \ldots, A) \\
\theta_{j_t}^{(0)}, \theta_{j_t}^{(1)}, \ldots, \theta_{j_t}^{(\mu-1)} & (t = 1, 2, \ldots, M) \\
- \; - \; - \; - \; - \; - & - \; - \; - \; - \; - \\
\theta_{u_t}^{(0)}, \theta_{u_t}^{(1)}, \ldots, \theta_{u_t}^{(\nu-1)} & (t = 1, 2, \ldots, N)
\end{array}$$

Digitized by Google

Nous allons étendre ces développements. Considérons les deux séries de nombres

(j) $$1, 2, \ldots, q \quad \text{et} \quad \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$$

où $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ sont q des nombres $1, 2, \ldots, n$. Soit t un des nombres $1, 2, \ldots, q$. Formons la série de nombres

(k) $$t, \theta_t^{(1)}, \theta_t^{(2)}, \ldots, \theta_t^{(k)}, \ldots$$

en prenant *seulement les nombres correspondants à un indice de θ égal à un des nombres $1, 2, \ldots, q$*. Considérons d'abord le cas où tous les nombres de la série $2(k)$ seraient parmi les nombres $1, 2, \ldots, q$. Soit δ le plus petit nombre répondant à l'égalité $\theta_t^{(\delta)} = t$. Les nombres

(l) $$t, \theta_t, \theta_t^{(2)}, \ldots, \theta_t^{(\delta-1)}$$

sont différents entre eux et se trouvent tous parmi les nombres $1, 2, \ldots, q$. Nous dirons alors que la ligne caractéristique $2(l)$ est *complète* parce que les termes de la série $2(k)$ se reproduiront dans le même ordre à partir du terme $\theta_t^{(\delta-1)}$.

Considérons maintenant le cas où tous les termes de la série $2(k)$ ne se trouvent pas parmi les nombres $1, 2, \ldots, q$. Nous supposons que $\theta_t^{(k)} = \theta_l$ soit le premier nombre de la série $2(k)$ qui se ne trouve pas parmi les nombres $1, 2, \ldots, q$. Les k premiers termes de la suite

(m) $$t, \theta_t, \theta_t^{(2)}, \ldots, \theta_t^{(k-1)}, \theta_t^{(k)}$$

se trouvent parmi les nombres $1, 2, \ldots, q$; mais nous avons $\theta_l > q$. La suite de nombres $2(m)$ est d'une autre nature que la suite $2(l)$, car on ne peut pas continuer la suite $2(m)$ au delà du dernier terme $\theta_t^{(k)}$. On ne peut donc pas arriver au premier terme t en continuant le procédé de la série $2(k)$. Le nombre de termes de la ligne $2(m)$ dépend aussi du nombre particulier avec lequel nous commençons l'opération et cela n'est pas le cas dans la ligne $2(l)$. Nous supposons que nous commençons toujours avec un tel nombre t que le nombre de termes différents dans $2(m)$ soit le plus grand possible. Nous appelons une ligne telle que

Digitized by Google

$2(m)$ avec un nombre maximum de nombres différents *une ligne caractéristique incomplète.* Le nombre maximum de termes est le nombre caractéristique de la ligne incomplète.

De toutes les lignes possibles de la forme $2(l), (m), \ldots$ nous formons le tableau caractéristique des nombres $2(j)$. Parmi les nombres des deux suites $2(j)$ on a $p+q$ qui sont différents, où $n-q \geqq p \geqq 0$ et $p \leqq q$. Soient L_i et l_i $(i=1, 2, \ldots, a)$ et M_i et m_i $(i+1, 2, \ldots, b)$ des nombres positifs entiers. Supposons qu'il y aura dans le tableau caractéristique L_i lignes *complètes* correspondantes au nombre caractéristique l_i $(i=1, 2, \ldots, a)$ et M_i lignes *incomplètes* correspondantes au nombre caractéristique m_i $(i=1, 2, \ldots, b)$. Tous les nombres dans les lignes complètes et incomplètes se trouvent entre les nombres $1, 2, \ldots, q$; sauf le dernier nombre dans chaque ligne incomplète. Nous avons donc

$$\text{(n)} \qquad \sum_1^a L_i l_i + \sum_1^b M_i (m_i - 1) = q, \quad \sum_1^b M_i = p$$

parce que chaque ligne incomplète contient un nombre différent des q nombres $1, 2, \ldots, q$.

Remarque: Soient L_i, l_i $((i=1, 2, \ldots, a)$ et M_i, m_i $(i=1, 2, \ldots, b)$ des nombres positifs entiers satisfaisant à l'équation 2 (n) ou q et p sont deux nombres positifs entiers tels que

$$q+p \leqq n \qquad p \leqq q \qquad p \geqq 0$$

On peut alors démontrer la proposition suivante:

On peut toujours choisir les q nombres $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ parmi les n nombres $1, 2, \ldots, n$ tels que $l_1, l_2, \ldots, l_a$ soient les nombres caractéristiques (de multiplisité respectivement $L_1, L_2, \ldots, L_a$) des lignes *complètes* du tableau caractéristique et $m_1, m_2, \ldots, m_b$ les nombres caractéristiques (de multiplicité respectivement $M_1, M_2, \ldots, M_b$) des lignes *incomplètes*.

3. La formation d'une classe de groupes de substitutions. — Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$; $v_1, v_2, \ldots, v_n$ $2n$ lettres différentes et considérons la fonction auxiliaire

$$\varphi = u_1 v_{\theta_1} + u_2 v_{\theta_2} + \ldots + u_n v_{\theta_n}$$

où $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ est une permutation quelconque des n nombres $1, 2, \ldots, n$. Supposons que $2(i)$ soit le tableau caractéristique correspondant à la série de nombres $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$. Il est évident que toutes les fonctions de la forme

Digitized by Google

$$\varphi_i = u_{i_1} v_{\theta_{i_1}} + u_{i_2} v_{\theta_{i_2}} + \ldots + u_{i_n} v_{\theta_{i_n}},$$

où $i_1, i_2, \ldots, i_n$ est une permutation quelconque des nombres $1, 2, \ldots, n$, sont identiques à φ. Pour les valeurs arbitraires des lettres u et v c'est seulement les formes φ_i qui sont identiques à φ.

Ceci posé. Supposons que v_t se change en v_k quand u_i se change en u_k (i et k sont deux quelconques des nombres $1, 2, \ldots, n$). La fonction φ devient, quand nous remplaçons u_k par u_{i_k} ($k = 1, 2, \ldots, n$) et par consequent v_{θ_k} par $v_{i_{\theta_k}}$

$$\varphi' = u_{i_1} v_{i_{\theta_1}} + u_{i_2} v_{i_{\theta_2}} + \ldots + u_{i_n} v_{i_{\theta_n}}$$

Le facteur de u_{i_t} est dans φ: $v_{\theta_{i_t}}$ et dans φ': $v_{i_{\theta_t}}$. Donc les conditions mécessaires et suffisantes pour que $\varphi' \equiv \varphi$ sont

(a) $$\theta_{i_t} = i_{\theta_t} \qquad (t = 1, 2, \ldots, n)$$

Soit t un des nombres $1, 2, \ldots, n$ et δ le nombre caractéristique correspondant. En introduisant de proche en proche dans 3(*a*) pour t les nombres

(b) $$t, \theta_t^{(1)}, \theta_t^{(2)}, \ldots, \theta_t^{(\delta-1)}$$

qui forment une ligne du tableau caractéristique 2(*i*), nous obtenons

$$\theta_{i_t} = i_{\theta_t}, \ \theta_{i_{\theta_t}} = i_{\theta_t^{(2)}}, \ \theta_{i_{\theta_t^{(2)}}} = i_{\theta_t^{(3)}}, \ \ldots, \ \theta_{i_{\theta_t^{(\delta-1)}}} = i_{\theta_t^{(\delta)}} = t$$

ou en appliquant peu à peu une de ces équations à la suivante

(c) $$\theta_{i_t} = i_{\theta_t}, \ \theta_{i_t}^{(2)} = i_{\theta_t^{(2)}}, \ \theta_{i_t}^{(3)} = i_{\theta_t^{(3)}}, \ \ldots, \ \theta_{i_t}^{(\delta)} = i_t$$

δ est donc aussi le nombre caractéristique de i_t. En effet, il n'existe pas un nombre entier $a < \delta$ tel que

$$\theta_{i_t}^{(a)} = i_t$$

car dans ce cas nous devrions avoir en vertu de 3(*c*)

$$i_{\theta_t^{(a)}} = i_t \quad \text{ou} \quad \theta_t^{(a)} = t$$

ce qui est contraire *a* l'hypothèse. Pour avoir $\varphi \equiv \varphi'$ il faut remplacer u_t par u_{i_t} ou i_t est un nombre quelconque dans les

Digitized by Google

lignes caractéristique du tableau 2 (*i*) correspondantes au nombre caracteristique δ. Il faut donc remplacer chacun des indices 3 (*b*) par

$$i_t,\ i_{\theta_t},\ i_{\theta_t^{(2)}},\ \ldots,\ i_{\theta_t^{(\delta-1)}}$$

respectivement ou en vertu de 3 (*c*) par

(d) $$i_t,\ \theta_{i_t},\ \theta_{i_t}^{(2)},\ \ldots,\ \theta_{i_t}^{(\delta-1)}$$

qui forment une ligne du tableau caractéristique, à savoir la ligne qui contient le nombre i_t. Nous avons ainsi démontré: Pour que $\varphi \equiv \varphi'$ il faut remplacer

(e)
$$u_{\theta^{(p)}_{s_t}} \text{ par } u_{\theta^{(p)}_{i_{s_t}}} \qquad (p = 0,\ 1, \ldots,\ a-1;\ t = 1,\ 2, \ldots,\ A)$$
$$u_{\theta^{(p)}_{j_t}} \text{ par } u_{\theta^{(p)}_{i_{j_t}}} \qquad (p = 0,\ 1, \ldots,\ \mu-1;\ t = 1,\ 2, \ldots,\ M)$$

— — — — — — — — — — — — — — —

(voir le tableau 2 (*i*)). Donc: Il faut remplacer u_{s_1} dans φ par $u_{i_{s_1}}$ où i_{s_1} est un quelconque des $A\alpha$ nombres du tableau caracteristique 2 (*i*) correspondant au nombre caractéristique α. Quand nous avons choisi i_{s_1} nous avons aussi choisi la place de α des lettres u. Il reste donc $A\alpha - \alpha = (A-1)\alpha$ nombres dans 2 (*i*) correspondants au nombre caractéristique α. Il faut ensuite dans φ remplacer u_{s_2} par $u_{i_{s_2}}$ où i_{s_2} est un quelconque des nombres restants dont la quantité est $(A-1)\alpha$ et qui correspondant au nombre caractéristique α. Mais quand nous avons choisi i_{s_2} nous avons déterminés le remplacement de α lettres u de φ. Il reste alors $(A-2)\alpha$ nombres dans 2 (*i*) correspondant au nombre caractéristique α. Il faut maintenant remplacer dans φ u_{s_3} par $u_{i_{s_3}}$ où i_{s_3} est un quelconque des $(A-2)\alpha$ nombres restants correspondants au nombre caractéristique α. Nous pouvons continuer de la sorte. Le nombre total de remplacement des $A\alpha$ nombre est

$$A\alpha\ (A-1)\alpha\ (A-2)\alpha \ldots 2\alpha\cdot\alpha = \alpha^A\, A!$$

De la même manière nous procédons pour les nombres correspondants au nombre caractéristique $\mu, \ldots, \nu$. Nous avons donc démontré:

Digitized by Google

Puisqu'il existe

$$\Delta = \overset{A}{\alpha} \cdot \overset{M}{\mu} \ldots \overset{N}{\nu} \cdot A!\ M! \ldots N!$$

permutations des lettres u et v qui laisseraient invariable la fonction φ il existe

$$E = \frac{n!}{\Delta}$$

permutations qui ne laissent pas invariable cette fonction.

Ceci posé. En posant dans la fonction φ:

$$u_t = x_t^h,\ v_t = x_t^k \qquad (t = 1, 2, \ldots, n)$$

h et k étant des nombres entiers et $h \gtrless k$ nous obtenons la fonction rationelle suivante des n lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\text{(f)} \qquad \varphi = x_1^h\ x_{\theta_1}^k + x_2^h\ x_{\theta_2}^k + \ldots + x_n^h\ x_{\theta_n}^k$$

En permutant les lettres x les lettres u et v se permutent ainsi que nous l'avons supposé et cette fonction reste invariable en même temps que la fonction de $u_1, u_2, \ldots, v_1, v_2, \ldots$ si on a $h \gtrless k$.

D'aprés 3 (*e*) toutes les substitutions

$$\text{(g)} \qquad S_r = \sigma_{s_1}\sigma_{s_2} \ldots \sigma_{s_A} \quad \sigma_{j_1}\sigma_{j_2} \ldots \sigma_{j_M} \ldots\ldots \sigma_{u_1}\sigma_{u_2} \ldots \sigma_{u_N}$$

où σ_t par exemple represente la substition

$$\sigma_t = \begin{pmatrix} x_{s_t}, & x_{\theta s_t}, \ldots, & x_{\theta^{(\alpha-1)} s_t} \\ x_{i_{s_t}}, & x_{\theta i_{s_t}}, \ldots, & x_{\theta^{(\alpha-1)} i_{s_t}} \end{pmatrix}$$

laisseraient invariable la fonction rationnelle φ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. L'indice i_{s_t} est choisi dans une ligne du tableau caractéristique 2 (*i*) correspondante au nombre caractéristique α. Les substitutions $\sigma_{j_t}, \ldots, \sigma_{u_t}$ représentent des substitutions analogues. Par exemple

Digitized by Google

$$\sigma_{u_t} = \begin{pmatrix} x_{u_t}, & x_{\theta u_t}, & \dots, & x_{\theta^{(\nu-1)} u_t} \\ x_{i_{u_t}}, & x_{\theta i_{u_t}}, & \dots, & x_{\theta^{(\nu-1)} i_{u_t}} \end{pmatrix}$$

L' ensemble des substitutions 3 (g)

$$S_1, S_2, \dots, S_\Delta$$

forme un groupe d'ordre Δ. Mais nous verrons que ce groupe est intransitif, en général, car nous permutons entre eux seulement les lettres correspondantes au même nombre caractéristique. Si tous les nombres caractéristiques sont égaux tels que

$$n = \alpha \cdot A$$

nous obtenons un groupe transitif d'ordre $\alpha^A A!$ Nous obtenons des groupes transitifs autant de fois qu'on peut diviser n en deux facteurs. Nous ne considérons pas içi le cas intéressant où $h = k$.

On voit que les groupes trouvés ne sont pas linéaires. En prenant un exemple nous allons voir qu'ils ne font pas partie, en général, des groupes abéliens.

En effet supposons $n = 4$ et $\theta_1 = 3$, $\theta_2 = 4$, $\theta_3 = 1$, $\theta_4 = 2$. Nous avons alors 2 comme nombre caractéristique de multiplicité 2, car $\theta_1^{(0)} = 1$, $\theta_1^{(1)} = 3$, $\theta_1^{(2)} = 1$; $\theta_2^{(0)} = 2$, $\theta_2^{(1)} = 4$, $\theta_2^{(2)} = 2$. La fonction φ devient

$$\varphi = x_1^h x_3^k + x_2^h x_4^k + x_3^h x_1^k + x_4^h x_2^k$$

Les deux substitutions

$$S = (x_1 x_2)(x_3 x_4), \quad S_1 = (x_1 x_3)$$

laissent invariable la fonction φ. Considerons la fonction

$$\psi = a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4$$

En appliquant sur cette fonction la substitution S nous obtenons

$$a x_2 + b x_1 + c x_4 + d x_3$$

En appliquant S_1 sur le résultat de la substitution nous obtenons

$$\psi_1 = a x_2 + b x_3 + c x_4 + d x_1$$

En appliquant sur ψ d'abord S_1 puis S nous obtenons

$$\psi_2 = a x_4 + b x_1 + c x_2 + d x_3$$

Digitized by Google

Nous n'avons pas $\psi_1 = \psi_2$. Donc la substitution SS_1 est différente de la substitution $S_1 S$.

4. Une généralisation. — Considérons au lieu de la fonction φ précédente la fonction

$$\psi = u_1 v_{\theta_1} + u_2 v_{\theta_2} + \ldots + u_q v_{\theta_q} \qquad (q \leqq n)$$

où $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ sont q quelconques des nombres $1, 2, \ldots, n$. Le tableau caractéristique des nombres $1, 2, \ldots, q$ et $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ est donné au § 2. Soit $i_1, i_2, \ldots, i_q$ une permutation quelconque des q nombres $1, 2, \ldots, q$. Toutes les fonctions de la forme

$$\psi_i = u_{i_1} v_{\theta_{i_1}} + u_{i_2} v_{\theta_{i_2}} + \ldots + u_{i_q} v_{\theta_{i_q}}$$

sont identiques à ψ. La fonction ψ devient, quand u_k se change en u_{i_k} $(k = 1, 2, \ldots, n)$

$$\psi' = u_{i_1} v_{i_{\theta_1}} + u_{i_2} v_{i_{\theta_2}} + \ldots + u_{i_q} v_{i_{\theta_q}}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\psi \equiv \psi'$ sont

(a) $$\theta_{i_t} = i_{\theta_t} \qquad (t = 1, 2, \ldots, q)$$

Soit t un des nombres $1, 2, \ldots, q$ appartenant à une ligne caracteristique complète et soit l_i le nombre caractéristique correspondant. Exactement comme au cas traité plus haut nous démontrerons qu'il faut remplacer u_t par u_{i_t} où i_t est un nombre quelconque dans les lignes caractéristiques complétes correspondantes au nombre caractéristique l_i.

Maintenant, considérons le cas où t est le premier nombre dans une ligne caractéristique *incomplète* correspondante au nombre caracteristique m_i. Les nombres de cette ligne incomplète sont

(b) $$t, \theta_t, \theta_t^{(2)}, \ldots, \theta_t^{(m_i - 2)}, \theta_t^{(m_i - 1)}$$

Les $m_i - 1$ premiers de ces nombres se trouvent parmi les q nombres $1, 2, \ldots, q$, tandis que le dernier $\theta_t^{(m_i - 1)} = \theta_l$ est différent de ces nombres. Nous avons donc $\theta_l > q$. En introduisant petit à petit les $m_i - 1$ premiers des nombres $4(b)$ dans $4(a)$ nous obtenons

Digitized by Google

$$\theta_{i_t} = i_{\theta_t},\ \theta_{i_{\theta_t}} = i_{\theta_t^{(2)}},\ \theta_{i_{\theta_t^{(2)}}} = i_{\theta_t^{(3)}} \ldots,\ \theta_{i_{\theta_t^{(m_i-2)}}} = i_{\theta_t^{(m_i-1)}}$$

ou

(c) $$\theta_{i_t} = i_{\theta_t},\ \theta_{i_t}^{(2)} = i_{\theta_t^{(2)}},\ \theta_{i_t}^{(3)} = i_{\theta_t^{(3)}}, \ldots,\ \theta_{i_t}^{(m_i-1)} = i_{\theta_t^{(m_i-1)}}$$

Il faut donc remplacer les indices 4 (*b*) respectivement par

(d) $$i_t,\ \theta_{i_t},\ \theta_{i_t}^{(2)}, \ldots,\ \theta_{i_t}^{(m_i-2)},\ \theta_{i_t}^{(m_i-1)}$$

Pour avoir $\psi' \equiv \psi$ il faut remplacer dans ψ u_k ($k \leqq q$) par u_{i_k} ($i_k \leqq q$) et par conséquence v_{θ_k} par $v_{i_{\theta_k}}$. Si $\theta_k > q$ nous avons $i_{\theta_k} > q$. Les $m_i - 1$ premiers des indices 4 (*b*) sont $< q$; les $m_i - 1$ premiers des indices 4 (*d*) sont donc aussi $< q$ Parce que le dernier nombre de 4 (*b*) soit $> q$ il faut que le dernier nombre de 4 (*d*) soit aussi $> q$.

Donc il est indispensable pour i_t de choisir le premier nombre dans une ligne caractéristique incomplète correspondant au nombre caractéristique l_t, cas seulement le dernier terme dans une ligne incomplète est $> q$. La ligne 4 (*d*) forme donc aussi une ligne incomplète correspondante au nombre caractéristique m_i. Il faut donc remplacer une ligne incomplète par une autre ligne incomplète correspondant au même nombre caractéristique. Supposons pour préciser qu'il y ait deux lignes incomplètes correspondantes au nombre caractéristique m_i, savoir

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_{m_i} \quad \text{et} \quad b_1,\ b_2, \ldots,\ b_{m_i}$$

On ne peut pas remplacer seulement une partie d'une ligne incomplète par une partie correspondante de la seconde ligne. En effet: si nous remplaçons $a_3, a_4, \ldots, a_{m_i}$ par $b_3, b_4, \ldots, b_{m_i}$ respectivement et $b_3, b_4, \ldots, b_{m_i}$ par $a_3, a_4, \ldots, a_{m_i}$ respectivement les deux lignes incomplètes deviennent:

$$a_1\, a_2\ b_3\, b_4 \ldots b_{m_i} \quad \text{et} \quad b_1\, b_2\ a_3\, a_4 \ldots a_{m_i}$$

qui ne sont pas les mêmes que les lignes précédentes. Nous obtenons donc un autre tableau caractéristique pour ψ' ce qui est impossible, parce que $\psi \equiv \psi'$. En introduisant de nouveau

Digitized by Google

$$u_t = x_t^h, \quad v_t = x_t^k$$

nous obtenons

$$\psi = x_1^h x_{\theta_1}^k + x_2^h x_{\theta_2}^k + \ldots + x_q^h x_{\theta_q}^k$$

et l'ordre du groupe laissant ψ invariable sera

$$\Delta_q = l_1^{L_1} l_2^{L_2} \ldots l_a^{L_a} L_1! \; L_2! \ldots L_a! \; M_1! \; M_2! \ldots M_b!$$

Dans le cas particulier où $q = \frac{n}{2}$ (n un nombre pair), $p = \frac{n}{2}$ nous avons (voir 2 (n)) un cas avec $\frac{n}{2}$ lignes incomplètes, chacune contenant deux termes. L'ordre du groupe correspondant sera

$$\Delta_q = \frac{n}{2}!$$

Le nombre de valeurs differentes de ψ sera.

$$E_q = \frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{\Delta_q}$$

On peut encore généraliser de plusieurs façons. Ainsi prenons $u_i, v_i, w_i, \ldots\ldots, \omega_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ qui seront des lettres differentes et désignons par

(a)
$$\begin{array}{c} \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \\ \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n \\ \hline \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \end{array}$$

un certain nombre de permutations des n nombres $1, 2, \ldots, n$. Considérons la fonction

(b)
$$\Phi = \sum_1^q u_i \, v_{\theta_i} \, w_{\varkappa_i} \ldots \omega_{\lambda_i} \qquad (q \leqq n)$$

qui est identique à

$$\sum_{t=1}^{q} u_{i_t} \, v_{\theta_{i_t}} \, w_{\varkappa_{i_t}} \ldots \omega_{\lambda_{i_t}}$$

quand $i_1, i_2, \ldots, i_q$ est une permutation quelconque des q nombres $1, 2, \ldots, q$.

Digitized by Google

Nous supposons que $v_i, w_i, \ldots \omega_i$ se changent en $v_k, w_k, \ldots, \omega_k$ respectivement quand u_i se change en u_k. En changeant u_t en u_{i_t} $(t = 1, 2, \ldots, n)$, où $i_1, i_2, \ldots, i_n$ est une permutation quelconque des n nombres $1, 2, \ldots, n$, nous obtenons

$$\Phi' = \sum_{t=1}^{q} u_{i_t} v_{i_{\theta_t}} w_{i_{\varkappa_t}} \ldots \omega_{i_{\lambda_t}}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes paur que $\Phi \equiv \Phi'$ sont

(c) $$\theta_{i_t} = i_{\theta_t}, \quad \varkappa_{i_t} = i_{\varkappa_t}, \ldots, \lambda_{i_t} = i_{\lambda_t} \quad (t = 1, 2, \ldots, q)$$

où $i_1, i_2, \ldots, i_q$ est une permutation quelconque des q nombres $1, 2, \ldots,$ q. Il faut donc que les fonctions

$$\varphi = \sum_{1}^{q} u_i v_{\theta_i}, \quad \varphi_1 = \sum_{1}^{q} u_i w_{\varkappa_i}, \ldots, \quad \varphi_r = \sum_{1}^{q} u_i \omega_{\lambda_i}$$

soient invariables en temps que la fonction Φ. En introduisant

$$u_t = x_t^h, \quad v_t = x_t^k, \quad w_t = x_t^l, \ldots, \quad \omega_t = x_t^m$$

où $h, k, l, \ldots, m$ sont des nombres entiers différents nous pouvons de cette manière trouver les substitution qui font

$$\Phi = \sum_{1}^{q} x_i^h x_{\theta_i}^k x_{\varkappa_i}^l \ldots x_{\lambda_i}^m$$

invariable. Nous ne considérons pas ici le cas où plusieurs des nombres $h, k, l, \ldots, m$ sont égaux entre eux.

Digitized by Google

Digitized by Google

ON SOME CLASSES OF SERIES USED IN MATHEMATICAL STATISTICS

BY

HARALD CRAMÉR

1. An investigator working in any of those branches of Science, where nowadays the statistical methods are being used, is confronted with many problems, the solution of which requires rather profound mathematical knowledge. Time and ability for mathematical investigations are, however, not always available, but in every actual case something has to be done, and consequently we often see that statistical practice is far in advance of theory. Thus certain methods are already in current use, although their mathematical theory is still far from complete. This is the case *e. g.* with certain classes of infinite series which hold a prominent position in the literature of mathematical statistics, particularly in Scandinavia and Germany. The theory of these series contains many points of purely mathematical interest, and I am going to deal with some of them in this lecture; I shall, however, mostly dwell upon such questions as are by the same time important from the point of view of statistical applications.

I will begin with the most important of the types of series to be dealt with. In statistical theory, these series occur in connection with the problem of finding a suitable analytical representation of the deviation of a given frequency curve from the curve representing the normal frequency function:

$$\varphi_{a,b}(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}. \tag{1}$$

This has always been regarded as one of the main problems of mathematical statistics (the importance of which has some-

Digitized by Google

times been slightly exaggerated) and many different solutions have been proposed. In the method of solution with which we are here concerned, the normal function itself is regarded as the first term of a series representing the given frequency function, and it is supposed that already the first three or four terms give a representation which is in general sufficiently accurate for practical purposes. This series is formed simply by taking the successive derivatives of the normal function and multiplying them with constant coefficients. We are thus led to consider the following type of expansions:

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu)}_{a,b}(x) . \tag{2}$$

With a view to statistical applications this series has been treated by a great number of authors, among whom I may mention *Gram*, *Thiele*, *Bruns*, *Charlier*, *Edgeworth*.

It is not necessary to deal throughout with the general form (1) of the generating function, with the parameters a and b. As a matter of fact, we may always, by a linear transformation, pass to the simple case $a = 0$, $b = 1$. Putting

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$F(a + bx) = f(x),$$

$$c_\nu = \frac{k_\nu}{b^{\nu+1}},$$

(2) is transformed into

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x). \tag{3}$$

Thus it will be sufficient to consider expansions of the type (3). The integrals representing the coefficients of (2) and (3), which will be given below, are transformed into one another by the same substitution. For a series of the type (3), we shall use in the sequel the name exponential series.

The first question that would naturally be asked by a mathematician facing a new kind of series is concerned with the convergence properties of that series. In the case of the expo-

Digitized by Google

nential series, and as far as its statistical applications are concerned, I hold, however, the convergence theory to be a matter of secondary interest, while certain other points of the theory are far more important. The reasons of this will be fully discussed below.

In spite of this I wish, however, to begin this lecture with an account of the convergence theory of the exponential series, The following remarks will explain why I have considered this desirable. — In a lecture delivered in 1921 before the Swedish Actuarial Society, prof. *Phragmén* pointed out that several of the authors dealing with the exponential series appear to hold quite wrong views about its convergence properties. Thus we can find in the literature a number of false proofs and false theorems concerning the exponential series. As for as I know, the most recent instance is furnished by *Arne Fisher,* who on p. 203 of the second edition of his book »The mathematical theory of probabilities« (New York 1922) enunciates a theorem, which he ascribes to the Russian mathematician *Vera Myller-Lebedeff.*[1]) This theorem, however, is false and does not coincide with the true theorem proved by *Vera Myller-Lebedeff.* As the fundamental mistake seems to be more or less the same for all these false theorems, I shall return to the matter below and give an explanation of the probable causes of the fallacy.

I now pass on to a brief survey of the convergence theory of the exponential series. The following sections of the paper deal with certain asymptotic properties of this series, which are of a fundamental importance for the statistical applications, and with certain other types of series used in mathematical statistics.

Convergence properties of the exponential series.

2. The polynomials of *Hermite* are defined by the relations

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} e^{-\frac{x^2}{2}} = (-1)^\nu H_\nu(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

$H_\nu(x)$ is a polynomial of degree ν, and we have

[1]) Die Theorie der Integralgleichungen in Anwendung auf einige Reihenentwicklungen. Math. Ann. *64* (1907), p. 388.

Digitized by Google

$$H_0(x) = 1,$$
$$H_1(x) = x,$$
$$H_2(x) = x^2 - 1,$$
$$H_3(x) = x^3 - 3x.$$
$$- - - - - - -$$
$$H_\nu(x) = x^\nu - \frac{\nu(\nu-1)}{2 \cdot 1!} x^{\nu-2} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2^2 \cdot 2!} x^{\nu-4} - \ldots.$$

These polynomials satisfy certain important relations, among which we quote the following

$$H_{\nu+1}(x) = x H_\nu(x) - \nu H_{\nu-1}(x),$$
$$H'_\nu(x) = \nu H_{\nu-1}(x),$$
$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{H_\nu(x)}{\nu!} t^\nu = e^{-\frac{1}{2}t^2 + tx},$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{H_\nu(x) H_\nu(y)}{\nu!} t^\nu = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} e^{-\frac{t^2x^2 + t^2y^2 - 2txy}{2(1-t^2)}}, \qquad (|t| < 1).$$

From these relations, we can deduce the inequalities

$$|H_\nu(x)| < K \sqrt{\nu!}\, e^{\frac{x^2}{4}} \tag{4}$$

for all values of x and ν, and

$$|H_\nu(x)| < K \nu^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\nu!}\, e^{\frac{x^2}{4}} \tag{5}$$

for $|x| \leqq \sqrt{\nu}$, K being independent of x and ν. We note further the equation

$$n! \sum_{\nu=0}^{n} \frac{H_\nu\, x) H_\nu(y)}{\nu!} = \frac{H_{n+1}(x) H_n(y) - H_n(x) H_{n+1}(y)}{x - y} \tag{6}$$

and the important orthogonality relations

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_\mu(x) H_\nu(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{for } \mu \neq \nu, \\ \nu!\, \sqrt{2\pi} & \text{» } \mu = \nu. \end{cases} \tag{7}$$

3. Writing as before

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

Digitized by Google

we have

$$\varphi^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu} H_{\nu}(x\ \varphi(x)$$

By means of the ortogonality relations (7), we obtain by formal calculation for the coefficients of the exponential series (3) expressions, analogous to the integrals giving the coefficients of an ordinary *Fourier* series. Using a notation well-known from the theory of these series, we may write

$$f(x) \sim \sum_{0}^{\infty} \frac{c_{\nu}}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x), \tag{8}$$

meaning simply that the c_{ν} are determined by the relations

$$c_{\nu} = (-1)^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, H_{\nu}(x)\, dx .$$

Let $f(x)$ be a given function, such that c_{ν} is finite for all values of ν; then we may ask if the series (8) is convergent and represents $f(x)$. This is the **convergence problem** of the exponential series.

For the more general expansion (2), we have the corresponding relations

$$F(x) \sim \sum_{0}^{\infty} \frac{k_{\nu}}{\nu!} \varphi_{a,b}^{(\nu)}(x) \tag{9}$$

and

$$k_{\nu} = (-b)^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, H_{\nu}\left(\frac{x-a}{b}\right) dx .$$

From the inequality (4), it is possible to deduce the following lemma, which is due to *Weyl.*[1])

Let $f(x)$ and $g(x)$ be two continuous functions, such that the integrals

[1]) Singuläre Integralgleichungen, Math. Anm. *66* (1909), p. 273. *Weyl* is working with the set of orthogonal functions $K_{\nu}(x) = \frac{H_{\nu}(x)\, e^{-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt[4]{2\pi}\sqrt{\nu!}}$ and with the corresponding *Fourier* expansion. The lemma quoted here constitutes a »Parseval's theorem« for this orthogonal system. We are transforming *Weyl*'s results to the exponential series.

Digitized by Google

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) e^{\frac{x^2}{2}} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) e^{\frac{x^2}{2}} dx$$

exist. Then, if in the above notation

$$f(x) \sim \sum_0^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x),$$

$$g(x) \sim \sum_0^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x),$$

we have

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ g(x)\ e^{\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_0^{\infty} \frac{c_\nu \gamma_\nu}{\nu!}. \tag{10}$$

This lemma is proved with the aid of Weierstrass's well-known approximation theorem. It is easily shown that the conclusion of the lemma holds good, even when $f(x)$ and $g(x)$ need not be continuous, as soon as it is possible to find continuous functions $f_1(x)$ and $g_1(x)$, corresponding to any given $\varepsilon > 0$, such that

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x) - f_1(x)\right)^2 e^{\frac{x^2}{2}} dx < \varepsilon,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(g(x) - g_1(x)\right)^2 e^{\frac{x^2}{2}} dx < \varepsilon.$$

From this lemma a convergence theorem for the expansion (8) may be deduced. It was pointed out by *M. Riesz* that the original proof of *Weyl* may be simplified so as to avoid every reference to the theory of integral equations. We introduce in (10) the particular function $g(t)$ defined by the relations

$$g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ for } t \leqq x,$$
$$g(t) = 0 \quad \text{» } t > x,$$

and we get

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt - \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sum_0^{\infty} \frac{c_{\nu+1}}{(\nu+1)!} \varphi^{(\nu)}(x).$$

Digitized by Google

It is readily seen that the right hand side is nothing but the exponential series corresponding to the function on the left hand side. As soon as a given function may be represented in this form, with an $f(x)$ satisfying the conditions of the lemma, we thus know that its exponential series is convergent, and even absolutely and uniformly convergent for all values of x. In this way we obtain the following theorem.

If $f(x)$ is a function which has a continuous[1] *derivative such that the integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f'(x))^2 e^{\frac{x^2}{2}} dx \tag{11}$$

exists, and if $f(x)$ tends to zero as $|x|$ tends to infinity, then $f(x)$ may be developped in an exponential series

$$f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x),$$

absolutely and uniformly convergent for $-\infty \leqq x \leqq \infty$.

4. The convergence problem may be treated also by another method, which is perfectly analogous to the classic method known from the theory of *Fourier* series. From the addition formula (6) we obtain

$$f(x) - \sum_0^n \frac{c_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big(f(x)\,\varphi(t) - f(t)\,\varphi(x)\Big) \frac{H_{n+1}(x)\,H_n(t) - H_{n+1}(t)\,H_n(x)}{n!\,(x-t)}\,dt.$$

It has been proved by *Galbrun*[2] that the properties of the »kernel«

$$\frac{H_{n+1}(x)\,H_n(t) - H_{n+1}(t)\,H_n(x)}{n!\,(x-t)}$$

are very similar to those of the corresponding kernel

[1] Or »almost« continuous in the sense of the above remark concerning Weyl's lemma.

[2] Sur un développement d'une fonction à variable réelle en séries de polynomes, Bulletin de la soc. math. de France, *41* (1913) p. 24. My attention was kindly drawn to this paper by Dr. *F. Nevanlinna* and Prof. *Lindelöf*.

Digitized by Google

$$\frac{\sin\,(2n+1)\dfrac{x-t}{2}}{\sin\dfrac{x-t}{2}}$$

occurring in the theory of *Fourier* series. *Galbrun* is mainly concerned with the case of a function $f(x)$ defined in a finite interval, and it follows from his investigations that the integral

$$\int_b^a \Big(f(x)\,\varphi(t-f(t)\,\varphi(x)\Big)\frac{H_{n+1}(x)\,H_n(t)-H_{n+1}(t)\,H_n(x)}{n!\,(x-t)}\,dt$$

tends to zero as n tends to infinity, as soon as $f\,x)$ is of bounded variation[1]) in (a, b) and x is a point of continuity. In a point of discontinuity, the same conclusion holds if $f(x)$ is replaced by

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

For the general case *Galbrun* only gives rather incomplete results, but his method is capable of being considerably improved. For $b > x+1$ and all sufficiently large values of n we obtain from the inequalities (4) and (5)

$$\left|\int_b^\infty \Big(f(x)\,\varphi(t)-f(t)\,\varphi(x)\Big)\frac{H_{n+1}(x)\,H_n(t)-H_{n+1}(t)\,H_n(x)}{n!\,(x-t)}\,dt\right| <$$

$$< K e^{\frac{x^2}{4}}\int_b^\infty (\,|f(x)|\,\varphi(t)+\varphi(x)\,|f(t)|\,)\,e^{\frac{t^2}{4}}dt,$$

K being an absolute constant. Now this may clearly be made as small as we please by choosing b sufficiently large, as soon as the integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,e^{\frac{t^2}{4}}dt$$

is supposed to converge. The integral from $-\infty$ to a may be treated in the same way, and the integral from a to b has already been discussed. By paying some further attention to questions of uniformity, we obtain the following theorem.[2])

[1]) In reality *Galbrun* is working with the so called »*Dirichlet* conditions«.

[2]) A somewhat less general theorem was proved by a quite different method by *Phragmén* in a lecture given before the Swedish Actuarial Society in 1923.

Digitized by Google

If $f(x)$ is of bounded variation in every finite interval, and if the integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, e^{\frac{x^2}{4}}\, dx \tag{12}$$

exists, then the expansion of $f(x)$ in an exponential series

$$\sum_0^\infty \frac{c_\nu}{\nu!}\, \varphi^{(\nu)}(x)$$

converges everywhere to the sum $\frac{1}{2}\,(f(x+0)+f(x-0))$. *The convergence is uniform in every finite interval of continuity.*

If a function $f(x)$ satisfies the conditions of *Weyl*'s theorem, it is obviously of bounded variation in every finite interval, and it is easily proved that we have for $2 < \alpha < \beta$

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|\, e^{\frac{x^2}{4}}\, dx < 4 \sqrt{\frac{1}{\alpha}\int_\alpha^\infty (f'(x))^2\, e^{\frac{x^2}{2}}\, dx},$$

so that the conditions of the last theorem are also satisfied. Thus the last theorem applies to a more general class of functions; on the other hand, its conclusion is less far-reaching, since it does not allow us to infer the absolute convergence of the series.

5. Anyone who is acquainted with the literature of mathematical statistics, will at once see that the above theorems assert considerably less than what has been assumed by several writers on the subject. Thus e. g. *Fisher* in the work quoted above states that the exponential series is convergent for every function $f(x)$ which has two continuous derivatives such that $f(x)$, $f'(x)$ and $f''(x)$ all tend to zero as x tends to infinity. In spite of this, we can show by examples that our theorems are **not** capable of being essentially improved as regards the behaviour of $f(x)$ at infinity.

Digitized by Google

Let us consider the function

$$f(x) = e^{-\lambda x^2}, \quad (\lambda > 0).$$

From the theorem of Art. 3, it follows that the corresponding exponential series is absolutely and uniformly convergent if $\lambda > \frac{1}{4}$. This series can without difficulty be explicitly formed, and if we put $x = 0$, we get the series

$$\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \sum_0^\infty \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2} \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right)^\nu,$$

which is absolutely convergent for $\lambda > \frac{1}{4}$, simply convergent for $\lambda = \frac{1}{4}$ and divergent for $\lambda < \frac{1}{4}$.

It is even possible to show that the exponential series may be divergent for a function which, for all values of x, differs from the normal function $\varphi(x)$ by less than any given ε and which has an arbitrary number of moments in common with $\varphi(x)$. Taking for instance

$$f(x) = \varphi(x) + \varepsilon (4\lambda^2 x^4 - 12\lambda x^2 + 3) e^{-\lambda x^2},$$

we have

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \varphi(x)\, dx$$

for $k = 0, 1, 2, 3$, and $f(x)$ tends uniformly towards $\varphi(x)$ as ε tends to zero. For $x = 0$, the corresponding exponential series becomes

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\varepsilon}{\lambda^2 \sqrt{2\lambda}} \sum_2^\infty \nu(\nu - 1) \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2} \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right)^{\nu-2},$$

which is absolutely convergent for $\lambda > \frac{1}{4}$, divergent for $\lambda \leqq \frac{1}{4}$.

6. We have seen above that the question of the convergence of the exponential series has not always been treated with proper accuracy. One of the main reasons of the mistakes seems to lie in the fact that different authors define the *Hermite* polynomials and the corresponding series in different ways. In this paper,

Digitized by Google

we have taken $e^{-\frac{x^2}{2}}$ as the generating function of the polynomials, but we might as well have taken e^{-x^2} or generally e^{-kx^2}. Of the authors quoted above, *Weyl* uses the same definition of $H_\nu(x)$ as we have done here, but he is working with the set of orthogonal functions

$$K_\nu x = \frac{H_\nu(x)\, e^{-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt[4]{2\pi}\,\sqrt{\nu!}}$$

and with the corresponding *Fourier* expansions, which are not identical with our »exponential series«, though the relation between the two developments is of a very simple character.[1] — *Galbrun* and *Myller-Lebedeff* take e^{-x^2} as the generating function of the polynomials, and the former considers a series of polynomials

$$\Sigma\, \alpha_\nu P_\nu(x), \quad \frac{d^\nu}{dx^\nu} e^{-x^2} = P_\nu(x)\, e^{-x^2},$$

while the latter works with the corresponding set of orthogonal functions

$$Q_\nu(x) = \frac{P_\nu(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^{\frac{\nu}{4}}\sqrt[4]{\pi}\,\sqrt{\nu!}}$$

and the *Fourier* development $\Sigma\, \beta_\nu\, Q_\nu(x)$. It is obvious that we shall easily be led into mistakes if we do not take care to transform a theorem belonging to one set of definitions into the language of another set. Let us consider in particular the last-mentioned *Fourier* series. Its terms are polynomials multiplied by $e^{-\frac{x^2}{2}}$, exactly as is the case with our exponential series. But the two series must not be confused. The Q-series exists and converges under far more general conditions than the exponential series.

7. The convergence theorems of Art. 3 and 4 may be easily transformed to the more general expansion (2), with the generating function

[1] The exponential series corresponding to $f(x)$ is identical with the »Fourier expansion« of $f(x)\, e^{\frac{x^2}{4}}$, multiplied with the factor $e^{-\frac{x^2}{4}}$.

Digitized by Google

$$\varphi_{a,b}(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}.$$

It follows from the substitution given in the introduction that both theorems hold good even for this expansion, as soon as we replace the integrals (11) and (12) by

$$\int_{-\infty}^{\infty} (F'(x))^2 \, e^{\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx$$

and

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)| \, e^{\frac{(x-a)^2}{4b^2}} dx$$

respectively.

If $F(x)$ is a statistical frequency-function satisfying the relations

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x\,F(x)\,dx = m, \quad \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 F(x)\,dx = \sigma^2,$$

it is customary to choose $a = m$, $b = \sigma$. In this case, the coefficients of the first and second derivatives disappear, and we get

$$F(x) \sim \varphi_{m,\sigma}(x) + \frac{c_3}{3!}\varphi'''_{m,\sigma}(x) + \ldots$$

If $F(x)$ is continuous and the integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, e^{\frac{(x-m)^2}{4\sigma^2}} dx$$

converges, the series converges everywhere and represents $F(x)$.

It has sometimes been supposed that the question of convergence or divergence of the series is independent of the parameters a and b of the generating function. This is, however, quite wrong. Consider the development of the function $e^{-\lambda x^2}$ with $0 < \lambda < \frac{1}{4}$. As soon as we choose $b^2 > \frac{1}{4\lambda}$, our theorems show that the series is everywhere absolutely convergent, whereas we have seen in Art. 5 that, for the particular set of values $a = 0$, $b = 1$, $x = 0$, the series diverges.

Digitized by Google

Asymptotic properties of the exponential series. The hypothesis of elementary errors.

8. Perhaps it might be thought that the mathematical treatment of the exponential series would now be rather complete. We have proved certain convergence theorems, and we have shown by examples that they are not capable of being essentially improved.

But if we look closer into the way the series are actually used in statistical works and try to find out what is there demanded of them, then I think we shall find that the question of convergence is in reality rather inferior and that quite different problems stand in the foreground.

We find to begin with that in practical applications only a very limited number of terms (at most four or five) will ever be considered. When a statistical frequency-function is expanded in an exponential series, the latter is generally normalized by putting the coefficients of the first and second derivatives equal to zero (cf. Art 7) and it is then expected that the first term, the normal function, will already give a reasonable first approximation to the developed function; further, that the next term will furnish a real second approximation and finally that the following terms — two or at most three — will still more improve the approximation and render it fully satisfactory for practical purposes. This way of looking at the matter, which dominates the literature of the subject, has obviously very little to do with the convergence or divergence of the infinite series. The question is rather this: Is there a general class of statistical frequency-functions, which are able to be approximately represented by the first few terms of an exponential series? and will this approximation be considerably better with two terms than with one, better with three than with two, and so forth? Thus we are confronted with a question concerning the asymptotic properties of the series instead of its convergence properties.

To be able to say anything at all about a problem of this kind, it is necessary first to examine the nature of the statistical frequency-functions a little closer. So long as a frequency-function is considered merely as an analytical instrument for the graduation and interpolation of empirically given frequency-distri-

Digitized by Google

butions, so long the theory offers nothing of deeper interest, and a question like the above mentioned has at most the significance of urging to further consideration. The theory will get a deeper meaning first when, as far as possible, it is brought into connection with the very causal structure of the phenomena that are to be investigated, so that a frequency function is something organically connected with a certain group of phenomena and not only an arbitrarily constructed interpolation function.

At this point it becomes natural to introduce the terminology of the calculus of probability, which has hitherto not been necessary. The calculus of probability furnishes, by its simple rules of combination, certain ideal schemes, which we compare with the observed phenomena. If, for some particular group of phenomena, we find a remarkable agreement between our observations on the one hand and a certain probability scheme on the other, then we feel, rightly or wrongly, inclined to form certain corresponding ideas as to the causal structure of the phenomena.

The particular probability scheme, with which we shall be principally concerned here, was first used in connection with the theory of errors of observation, where it served to »explain« the appearance of the normal error function. It is found already in the work of *Laplace*; by later authors it has been named the hypothesis of elementary errors.

We shall say in the following that a statistical variable is generated by elementary components, if it can be regarded as the sum of a great number of mutually independent variables, each of which has its own probability function. In statistical practice, we often meet with cases when it seems reasonable to make this assumption, and, as a matter of fact, it is only for variables of this kind that there has been any attempt towards giving a theoretical justification of the above statement concerning the asymptotic properties of the exponential series. From the same hypothesis, also other types of series have been deduced, for which analogous asymptotic properties are claimed.

The mathematical foundations of this theory seem, however, to be rather weak. Indeed it can be shown by easy formal calculation that we can form an exponential series corresponding to any variable which is generated by elementary components, and

Digitized by Google

that the first terms of the series are generally rapidly decreasing, if the number of the components is large. But this kind of argument is obviously quite insufficient for the proof of anything about the asymptotic character of the series. As far as I can see, it has not yet been proved that there is anything more than a purely formal relation between the series and the corresponding probability function. The attempts hitherto made in this direction must be regarded as unsuccessful.

On the other hand, practical experience shows that in a great number of cases given frequency-distributions are remarkably well represented by the sum of the first two or three terms of the corresponding exponential series. But if, in a particular case, we want to regard this fact as supporting the hypothesis of elementary components, and if we want to claim for the coefficients of the series some particular significance as statistical characteristics of the frequency-distribution (e. g. measures of »skewness« and »excess«), then it becomes necessary to go much further into the mathematical theory of the subject. Above all, we must try to find out whether it is really possible to prove anything about the asymptotic properties of the series.

9. We shall begin by giving some formal definitions, which will enable us to give a precise mathematical form to the problem. We call a function $V(t)$ the *probability function* of a statistical variable x if, for all values of t,

$$V(t) = \text{the probability of } x \leqq t.$$

Obviously $V(t)$ is a never decreasing function, such that

$$V(-\infty) = 0, \quad V(\infty) = 1.$$

The mathematical expectation of a quantity $f(x)$ is expressed by a *Stieltjes'* integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, d\, V(t).$$

Let $V_1(t)$, $V_2(t), \ldots V_n(t)$ denote the probability functions of the mutually independent variables x_1, $x_2, \ldots x_n$. Then the sum

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

has the probability function

Digitized by Google

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} V_n(t - t_1 - \dots - t_{n-1})\, dV_1(t_1) \dots dV_{n-1}(t_{n-1}).$$

It is true that, by the ordinary definition of *Stieltjes'* integral, this expression only gives the value of $V(t)$ in all its points of continuity. In a point of discontinuity, however, according to our general definition of a probability function $V(t)$ always assumes the upper limiting value.

Without restraining the generality we may suppose [1])

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\, d\, V_k(t) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots n).$$

We put

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2\, d\, V_k(t) = \sigma_k^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d\, V(t) = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2 = \sigma^2,$$

and

$$W(t) = V(\sigma t).$$

Then $W(t)$ will be the probability function of the variable

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{x_1 + x_2 + + \dots + x_n}{\sigma}$$

and it is readily seen that we have

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\, d\, W(t) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^2\, d\, W(t) = 1. \tag{13}$$

It is known from the theory of errors of observation that, under certain conditions, the function $W(x)$ is approximately equal to

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$

as soon as the number n of the elementary components is sufficiently large.

If we form, as in Art. 3, the exponential series corresponding to the difference $W(x) - \Phi(x)$, the coefficients of $\varphi(x)$ and

---

[1]) We shall always tacitly assume that the integrals occurring in our arguments are convergent.

Digitized by Google

$\varphi'(x)$ will disappear, and the series may be written, with a slightly altered notation,

$$W(x) \sim \Phi(x) + \sum_{3}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} \Phi^{(\nu)}(x), \tag{14}$$

where

$$c_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} H_\nu(x)\, d\, W(x). \tag{15}$$

By means of the theorem of Art. 3, (cf. also Art. 7), it can be shown that the series is absolutely convergent and represents $W(x)$ if all the V_k have continuous derivatives such that

$$\int_{-\infty}^{\infty} (V'_k(x))^2 e^{\lambda x^2} dx$$

exists for some $\lambda > \frac{1}{2\sigma_k^2}$.

We shall not, however, restrict ourselves to cases when all the coefficients (15) exist. It is readily seen that the c_ν may be expressed in terms of the moments

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^i\, d\, V_k(x)$$

of the component functions, and that the existence of the ν:th moment for all these functions is sufficient to warrant the existence of $c_3, \ldots . c_\nu$.

10. We are now in a position to give a precise mathematical form to the problem discussed in Art. 8. The variable

$$x = x_1 + x_2 + \ldots . + x_n$$

considered in Art. 9 is a statistical variable, generated by the elementary components x_k, which are all measured from their respective means as origin. Choosing the standard deviation σ as our unit of measurement, we obtain the variable $\frac{x}{\sigma}$ with the probability function $W(t)$. We then ask: Under what circumstances is it true, that for large values of n

1) $W(x) - \Phi(x)$ is small,

Digitized by Google

2) $W(x) - \Phi(x)$ is asymptotically (for increasing n) represented by the first terms of the series $\Sigma \frac{c_\nu}{\nu!} \Phi^{(\nu)}(x)$?

Besides their general statistical importance, these questions have a direct bearing upon the problem of risk of an insurance company. In this case, the elementary components are formed by the gain or loss of the company on each single assurance, and the fundamental variable is the sum of all these: the total gain or loss of the company. In works on this theory, it is more or less customary to replace simply $W(x)$ by $\Phi(x)$, a procedure which leads, however, to results of a sometimes doubtful value. I hope to be able to discuss the applications to this theory in another paper.

11. The first question enunciated in the preceding Article has been treated by many different authors, and it appears from their work that, under very general conditions, $W(x)$ does tend uniformly towards $\Phi(x)$ as n tends to infinity. We shall mention only one particular case. Let us suppose that

$$\tau_k = \int_{-\infty}^{\infty} |t|^3 \, d\, V_k(t)$$

exist for $k = 1, 2, \ldots . n$, and put

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n .$$

Then if

$$\frac{\tau}{\sigma^3} \to 0$$

as $n \to \infty$, we have

$$W(x) \to \Phi(x)$$

uniformly for all values of x. In the particular case when all the probability functions V_k of the components are equal, we can even show that

$$| W(x) - \Phi(x) | < K \frac{\log n}{\sqrt{n}},$$

where K is independent of n and x.

More general theorems have been proved i. a. by *Liapounof*, *Lindeberg* and *Lévy*. It appears that, under certain conditions, we

Digitized by Google

may assert the convergence of $W(x)$ towards $\Phi(x)$ even in cases when the moments

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^i \, d\, V_k(t)$$

do not exist for any $i > 2$. In such a case, no term in the series $\Sigma \frac{c_\nu}{\nu!} \Phi^{(\nu)}(x)$ has a finite coefficient.

12. We pass now to the second question of Art. 10. Thus we assume the existence of a certain number of moments of the $V_k(t)$, so that at least some terms of the series $\Sigma \frac{c_\nu}{\nu!} \Phi^{(\nu)}(x)$ have finite coefficients, and we ask if these terms have any asymptotic significance when n is large.

In the particular case when all the V_k are equal, it is easily proved that we have for every fixed ν

$$c_\nu = O\left(n^{\left[\frac{\nu}{3}\right] - \frac{\nu}{2}}\right),$$

so that every particular term of the series tends to zero with increasing n. It follows that, with respect to their order of magnitude, the terms of the series can be arranged in groups in the following way:

Order of term.	Order of magnitude.
3	$n^{-\frac{1}{2}}$
4, 6	n^{-1}
5, 7, 9	$n^{-\frac{3}{2}}$
8, 10, 12	n^{-2}
11, 13, 15	$n^{-\frac{5}{2}}$

If the V_k are not actually equal, but satisfy certain conditions of regularity with respect to their moments, the order of magnitude of the terms will still be the same.

It would now be rather tempting to presume that in such cases the terms of the series would give an asymptotic expansion of $W(x) - \Phi(x)$, with an error indicated by the order of magnitude of the terms. This can, however, not be true. Let us

Digitized by Google

consider the particularly simple case which corresponds to the well-known theorem of *Bernoulli.* — All the V_k are equal, and there are only two possible values for the elementary components x_k. If p and q are two positive numbers such that $p+q=1$, then

$p =$ the probability that x_k takes the valne q,
$q =$ » » » » » » » $-p$,

The normalized probability function $W(x)$, which corresponds to the sum of n such components, expresses the probability of »succeeding« at most

$$np + x\sqrt{npq}$$

times in a series of n mutually independent throws, when the chance of succeeding in every throw is p. The graph representing $W(x)$ has the form of a »staircase« with $n+1$ steps; in each of the points

$$x = s_\mu = \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}}, \qquad (\mu = 0,\ 1,\ \ldots\ n),$$

falls a step of the height

$$\varrho_\mu = \binom{n}{\mu} p^\mu q^{n-\mu}.$$

If n tends to infinity while s_μ remains bounded, it is well known that ϱ_μ will be of the order $n^{-\frac{1}{2}}$. Thus every result of the type

$$\left| W(x) - \Phi(x) - \sum_3^h \frac{c_\nu}{\nu!} \Phi^{(\nu)}(x) \right| < \frac{K}{n^\alpha},$$

with $\alpha > \frac{1}{2}$ and K independent of x and n, is necessarily false. On the other hand, it can be proved that we have in this case

$$|W(x) - \Phi(x)| < \frac{K}{n^{\frac{1}{2}}},$$

and this shows that the asymptotic representation of $W(x)$ is not improved by considering the terms containing derivatives of Φ.

Digitized by Google

The case $p = q = \frac{1}{2}$ is particularly interesting. Then $c_3 = 0$ and no term of the series $\Sigma \frac{c_\nu}{\nu!} \Phi^{(\nu)}(x)$ is of an order greater than $\frac{1}{n}$. But still the difference

$$W(x) - \Phi(x) - \sum_3^h \frac{c_\nu}{\nu!} \Phi^{(\nu)}(x) \tag{16}$$

is, for any fixed h, sometimes of the order $n^{-\frac{1}{2}}$.

It might be thought that this negative result is essentially due to the fact that we have been working with discontinuous probability functions. It can, however, be shown by another example that this is not so. Let the probability function of x_k be

$$V_k(x) = p\, \Phi(\alpha k^2 (x - q)) + q\, \Phi(\alpha k^2 (x + p)),$$

p and q having the same meaning as before and α denoting a constant. $V_k(x)$ is continuous and, for $k \to \infty$, tends towards the elementary probability function considered in the preceding example. If we consider the sum $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ and form, in the same manner as before, its normalized probability function $W(x)$, the corresponding exponential series will obviously be everywhere absolutely and uniformly convergent. Its terms are, for increasing n, of the same orders of magnitude as those given above for the case when all V_k are equal. But in spite of all this it can be proved that, as soon as α is sufficiently large, the difference (16) is, for any fixed h, sometimes of the order $n^{-\frac{1}{2}}$. Thus we are led to the same conclusions as in the preceding example.

13. It follows from the above examples that, even in very regular cases, the order of the asymptotic representation of $W(x)$ is not always improved by taking into consideration the derivated terms of the exponential series. Thus we cannot assert i. e. that $\Phi(x) + \frac{c_3}{3!} \Phi'''(x)$ gives an »asymptotically better« approximation to $W(x)$ than that already furnished by $\Phi(x)$.

If we vant to get a positive result, it will obviously be necessary to modify our problem. We shall discuss two possible

Digitized by Google

ways of doing this. In this Article, we shall modify the conception of an »asymptotitic representation« and show that some results may be obtained in this way. In the following Article, it will be shown that, if the V_k statisfy certain conditions of regularity, we shall really have an asymptotic expansion in the strict sense.

It can be proved that, under fairly general conditions, a sum of the type

$$\Phi(x) + \sum_{3}^{h} \frac{c_\nu}{\nu!} \Phi^{(\nu)}(x)$$

gives, *on the average*, a real asymptotic expansion of $W(x)$. In the further discussion of this point we shall restrict ourselves to the particular case when all n components $V_k(x)$ are equal. This will enable us to avoid the introduction of a complicated system of notations, without causing any essential modification in the general character of the result. In this case, we have the following theorem.

Let β denote a positive constant, which is arbitrary but fixed, and let h be a positive integer. Putting

$$z = x + t_1 + t_2 + \ldots + t_h,$$

we have

$$(17) \quad \int_{-\beta}^{\beta} \ldots \int_{-\beta}^{\beta} \left(W(z) - \Phi(z) - \sum_{3}^{3h} \frac{c_\nu}{\nu!} \Phi^{(\nu)}(z) \right) dt_1 \ldots dt_h = O\left(\frac{\log^2 n}{n^{\frac{h+1}{2}}} \right),$$

uniformly for all values of x. In cases when only a finite number of the c_ν exist, this relation holds as soon as c_{3h+1} has a finite value.

Thus we see that the mean value of the difference between $W(x)$ and a sum of terms of the exponential series, taken over an arbitrarily small interval, has an order of magnitude which decreases when more terms are taken into consideration. It is readily seen that, every time the number of integrations is increased by one, a group of three more terms will get asymptotic significance. It may be noted that in the sum $\sum_{3}^{3h}$ there is

Digitized by Google

one term, viz. the term corresponding to $\nu = 3h - 1$, which has a smaller order of magnitude than the error term indicated by the theorem.

Roughly speaking, we might interprete this theorem by saying that the curve

$$y = \Phi(x) + \sum_{3}^{3h} \frac{c_\nu}{\nu!} \Phi^{(\nu)}(x)$$

furnishes a mechanical graduation of the curve $y = W(x)$. This result, and the more general theorem of which the above is a particular case, seem to be of a certain importance for the statistical applications of the exponential series. I am giving below the outlines of a proof, reserving further details for publication elsewhere.

We first introduce the adjuncts of the probality functions of Art. 9 by putting

$$v_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} d\, V_k(x),$$

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} d\, V(x),$$

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} d\, W(x).$$

Then it is easily proved that we have

$$v(t) = v_1(t)\, v_2(t) \ldots . v_n(t),$$

$$w(t) = v\left(\frac{t}{\sigma}\right),$$

σ being defined as in Art. 9. Further, if we have

$$W(x) \sim \Phi(x) + \sum_{3}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} \Phi^{(\nu)}(x),$$

then we have also formally

$$e^{\frac{t^2}{2}} w(t) \sim 1 + \sum_{3}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} (it)^\nu.$$

By means of these formulae, we can prove the fundamental identity

Digitized by Google

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\right)^h \left(W(x) - \Phi(x) - \sum_3^{3h} \frac{c_\nu}{\nu!} \Phi^{(\nu)}(x)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2} + itx}}{(it)^{h+1}} \left(e^{\frac{t^2}{2}} w(t) - 1 - \sum_3^{3h} \frac{c_\nu}{\nu!} (it)^\nu\right) dt ,$$

h being a positive integer. Corresponding to $h = 0$, there is an analogous formula for $W(x) - \Phi(x)$, which contains a generally non-absolutely convergent integral. For $h > 0$, however, the integrals are absolutely convergent, and by a somewhat laborious evaluation of the integral on the right hand side we can prove our theorem. The theorem is a »best possible« one in the sense that h integrations are necessary in order to get an asymptotic expansion of $W(x)$ with an error of the order indicated by (17).

14. If the components $V_k(x)$ satisfy certain conditions, we can obtain an asymptotic expansion of $W(x)$ in the ordinary sense. As in the preceding Article, we shall restrict ourselves here to the case of equal components. Thus we have

$$V_1(x) = V_2(x) = \ldots = V_n(x) .$$

Putting

$$V_0(x) = V_1(\sigma_1 x) ,$$

we have the following theorem, which is only a particular case of a more general one, the proof of which will be published at another occasion.

If the second derivative $V''_0(x)$ exists and satisfies the relation

$$\left| V''_0(x) + \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| \leqq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} , \tag{18}$$

then we have, for any positive integer h,

$$\left| W(x) - \Phi(x) - \sum_3^{3h} \frac{c_\nu}{\nu!} \Phi^{(\nu)}(x) \right| < K n^{-\frac{h+1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

where K is independent of n and x.

Digitized by Google

The proof of this theorem is based on the inequality

$$\left| \frac{c_\nu}{\nu!} \Phi^{(\nu)}(x) \right| < K n^{-\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} \sum_{i=1}^{\mu} \binom{n}{i} i^{\frac{\nu+i}{2}} \sqrt{\frac{\nu!}{(\nu+i)!}},$$

with

$$\mu = \text{Min}\left(\left[\frac{\nu}{3}\right], n\right),$$

which may be deduced from (18).

15. From the hypothesis of elementary components, prof. *Charlier* has deduced another type of series, which he calls the B-series. We shall present this deduction here in a somewhat generalized form.

Let us consider a variable x generated by n elementary components. We introduce the fundamental assumption that the probability functions of the components depend on n in the following particular way. If λ is a positive constant and $E(t)$ denotes the probability function[1]) of a »variable« which is always $= 0$, then we put

$$V_1(t) = \ldots = V_n(t) = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) E(t) + \frac{\lambda}{n} U(t),$$

$U(t)$ being an arbitrary probability function. Now, if $V(t)$ denotes the probability function of x, and $v_1(t)$, $v(t)$ and $u(t)$ are the adjuncts of $V_1(t)$, $V(t)$ and $U(t)$ respectively, it is obvious that we have

$$v_1(t) = 1 + \frac{\lambda}{n}\left(u(t) - 1\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} v(t) = \lim_{n\to\infty} \left(v_1(t)\right)^n = e^{\lambda(u(t)-1)}.$$

Putting

$$u(t) = a(t) + i\beta(t),$$

it follows that we have,[2]) if certain convergence conditions are satisfied,

$$\lim_{n\to\infty} V(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{\lambda(a(t)-1)} \sin\left(tx - \lambda\beta(t)\right)\frac{dt}{t}.$$

---

[1]) Hence we have $E(x) = 0$ for $x < 0$, $E(x) = 1$ for $x \geqq 0$.

[2]) The expressions given in this Article represent, as a rule, the limit of $V(x)$ only in all points of continuity.

Digitized by Google

1. Taking, as a first example,

$$U(x) = \Phi(x)$$

we have

$$\lim_{n\to\infty} V(x) = e^{-\lambda} \sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\nu}}\right),$$

where $\Phi\left(\frac{x}{0}\right)$ is to be interpreted as $E(x)$.

2. If we put

$$U'(x) = \frac{1}{2} \quad \text{for} \quad -1 \leqq x \leqq 1,$$

$$U'(x) = 0 \quad \text{for} \quad |x| > 1,$$

we have

$$u(t) = \frac{\sin t}{t},$$

$$\lim_{n\to\infty} V(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} e^{-\lambda} \int_0^\infty e^{\lambda \frac{\sin t}{t}} \frac{\sin tx}{t}\, dt.$$

3. Choosing with prof. *Charlier*

$$U(x) = E(x-1),$$

we have

$$u(t) = e^{-it},$$

$$\lim_{n\to\infty} V(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} e^{-\lambda} \int_0^\infty e^{\lambda \cos t} \frac{\sin(tx - \lambda \sin t)}{t}\, dt.$$

The limit of $V(x)$ is a »staircase« with steps in the points $x = 0, 1, 2, \ldots$. The height of the step at $x = \nu$ is

$$\psi_\lambda(\nu) = \frac{\lambda^\nu}{\nu!} e^{-\lambda} = \frac{1}{\pi} e^{-\lambda} \int_0^\pi e^{\lambda \cos t} \cos(t\nu - \lambda \sin t)\, dt.$$

The function $V(x)$ itself is also represented by a staircase, and for the height of the step at $x = \nu$ there is an asymptotic expansion

$$\psi_\lambda(\nu) + \frac{\alpha_0 \psi_\lambda(\nu) + \alpha_1 \psi_\lambda(\nu-1) + \alpha_2 \psi_\lambda(\nu-2)}{n} +$$

$$+ \frac{\beta_0 \psi_\lambda(\nu) + \ldots \beta_4 \psi_\lambda(\nu-4)}{n^2} + \ldots.$$

Digitized by Google

If, in this expansion, we consider ν as a continuous variable and use the second (integral) expression of $\psi_\lambda(\nu)$, we get the *Charlier* B-series. In practical applications, it has proved very useful. From a theoretical point of view, however, it is obvious that it has only an artificial connection with the hypothesis of elementary components. Further, as prof. *Steffensen* has shown, it suffers from the inconvenience that the integrals expressing the moments of the function $\psi^\lambda(x)$ are divergent.

Digitized by Google

Digitized by Google

ÜBER DIE THEORIE DER ALGEBRAISCHEN KÖRPER

VON

ÖYSTEIN ORE

Bekanntlich gilt in der Theorie der algebraischen Zahlen nicht mehr der Satz von der eindeutigen Zerlegung in Primfaktoren. Durch die Einführung der idealen Zahlen erhält man aber den neuen Hauptsatz, dass ein jedes Ideal eindeutig in Primidealfaktoren zerlegt werden kann.

Dieser Satz ist zuerst von *Dedekind* bewiesen worden, der bei seiner klassischen Theorie der Ideale die Idealzahlen als gewisse unendliche Systeme von Zahlen des Körpers definiert. Für die Anwendung dieser Idealtheorie auf vorgelegte Probleme ist es aber notwendig, ein Verfahren zu kennen, wonach man die Primidealzerlegung der algebraischen Zahlen bestimmen kann. Wie man leicht sieht, ist es hinreichend, wenn man die rationalen Primzahlen in Primideale zerlegen kann.

Allgemein ist nun der vorgelegte Körper K durch eine Wurzel einer irreduziblen Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{1}$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten definiert, und es wäre daher wünschenswert, die Idealzerlegungen direkt aus der Gleichung (1) ableiten zu können. Es ist dabei Dedekind gelungen, den folgenden Satz zu beweisen:

Es wird $f(x)$ (mod p) in Primfunktionen zerlegt

$$f(x) \equiv \varphi_1(x)^{e_1} \varphi_2(x)^{e_2} \ldots \varphi_r(x)^{e_r} \pmod{p},$$

wobei der Grad von $\varphi_i(x)$ gleich m_i ist. Wenn dann die Primzahl p kein Teiler des Index k der Zahl ϑ ist, so hat p die Primidealzerlegung

$$p = \mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{e_r}, \quad N\mathfrak{p}_i = p^{f_i}.$$

Digitized by Google

Dabei ist der *Index* k der Zahl ϑ bekanntlich in der folgenden Weise definiert: Es sei d die Körperdiskriminante von K und weiter D die Diskriminante der Gleichung (1); dann ist D durch d teilbar, und man hat

$$D = k^2 d, \tag{2}$$

wo k ganz rational ist. Primzahlen, welche in k aufgehen, werden oft *ausserwesentliche Diskriminantenteiler* genannt.

Durch verschiedene Wahl der Zahl ϑ im Körper K wird man verschiedene Gleichungen (1) und daher auch verschiedene Diskriminanten erhalten, wodurch man nach (2) für k verschiedene Werte bekommt. Es wäre jetzt denkbar, dass man die Zahl ϑ so wählen könnte, dass der entsprechende Index nicht durch p teilbar wäre, wodurch man aus dem Dedekindschen Satze die Primidealzerlegung von p erhielte. Dedekind hat selbst die Frage untersucht und nachgewiesen, dass es vorkommen kann, dass alle Indices des Körpers einen gemeinsamen Faktor haben. In diesem Falle gibt es also Primzahlen, welche in allen Zahlen k aufgehen. Diese Primzahlen werden gemeinsame ausserwesentliche Diskriminantenteiler genannt, und für sie konnte Dedekind keine Methode angeben, wodurch man ihre Primidealzerlegungen bestimmen konnte. Daraus folgt auch, dass man die Idealtheorie nicht auf die Theorie der höheren Kongruenzen begründen kann, so wie *Kummer* es für Kreisteilungskörper gemacht hatte.

Kronecker hat einen anderen Weg eingeschlagen, indem er seine Funktionale einführte, d. h. rationale Funktionen von einer Reihe von Hilfsvariablen. Wenn speziell

$$\omega_1, \omega_2, \ldots . \omega_n$$

eine Minimalbasis des Körpers ist, so heisst die Form

$$t = x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2 + \ldots . + x_n \omega_n$$

die *Fundamentalform* des Körpers, und wenn man den Variablen x_i alle rationalen Werte beilegt, kan man sie als Repräsentanten aller Zahlen des Körpers auffassen. Die Fundamentalform genügt einer Gleichung n^{ten} Grades, worin die Koeffizienten ganze rationale Funktionen der x_i mit ganzen rationalen Koeffizienten sind. Diese Gleichung heisst die *Fundamentalgleichung*, und wie *Hensel* gezeigt hat, kann man durch Untersuchung der

Digitized by Google

Fundamentalgleichung immer die Zerlegung einer vorgelegten Primzahl bestimmen.

Die Kronecker'sche Theorie führt auch zwanglos zu den Hauptsätzen der Idealtheorie; man muss aber in dieser Richtung der Dedekind'schen Theorie einen Vorzug geben, indem die Einführung der Hilfsvariablen nicht für das Problem als eine natürliche Behandlungsweise erscheint. Weiter bemerke ich auch, dass man durch die Kronecker'sche Richtung keine direkte Verbindung zwischen der definierenden Gleichung (1) und dem Zahlkörper erreicht.

Hensel hat durch seine Theorie der *p-adischen Zahlen* noch einen anderen Weg eingeschlagen, den ich nur ganz kurz erwähne. Eine *p*-adische Zahl hat gewöhnlich die Form

$$A = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots,$$

wobei die a_i ganze rationale Zahlen sind, und ist also formal durch eine divergente Reihe dargestellt. Eine p-adische Zahl hat aber keine Zahl-existenz im gewöhnlichen Sinne, sondern muss nur als ein Symbol für eine unendliche Reihe von Kongruenzen aufgefasst werden. Durch diese Bezeichnungsweise erhält man für viele Probleme eine einfache Darstellung, während es auch Probleme gibt, wo die Anwendung wegen der unendlichen Anzahl der Operationen schwierig ist. Für das Problem der Bestimmung der Primidealzerlegungen der Primzahlen gibt Hensel dabei keine neue Methode, indem er auf die oben erwähnte Kronecker-Henselsche Methode zurrückgreifen muss.

Ich werde hier kurz versuchen, die Hauptzüge meiner letzten Untersuchungen auf diesem Gebiete zu geben, wobei ich eine neue Behandlungsweise der Idealtheorie benutze. Diese Methode ist meiner Meinung nach sehr natürlich, und sie hat ihre Nützlichkeit dadurch erwiesen, dass mehrere Probleme durch sie gelöst werden können.

Wie schon bemerkt, konnte man nicht, wie von Dedekind nachgewiesen, die Theorie der Ideale durch die Theorie der höheren Kongruenzen für einen Primzahlmodul begründen. Es ist dann naheliegend zu versuchen, die Idealtheorie mit Hilfe der Theorie der höheren Kongruenzen für Primzahlpotenzmoduln darzustellen. Dabei hat man aber sofort die Schwierigkeit, dass die Theorie der Kongruenzen für Primzahlpotenzmoduln selbst fast unbehandelt ist, und die Ursache dazu ist wohl wieder darin

Digitized by Google

zu suchen, dass die Zerlegung der Polynome in Primfaktoren für Primzahlpotenzmoduln im allgemeinen nicht eindeutig ist.

Es war daher zuerst notwendig, diese Schwierigkeiten zu überwinden, und es gelang mir, den folgenden Hauptsatz zu beweisen:

Es sei die Diskriminante eines beliebigen Polynoms (1) genau durch p^δ teilbar. Wenn dann für $f(x)$ zwei verschiedene Zerlegungen in Primfaktoren (mod p^α) besteht, also

$$f(x) \equiv f_1(x) f_2(x) \ldots . f_r(x) \equiv \varphi_1(x) \varphi_2(x) \ldots . \varphi_s(x) \pmod{p^\alpha},$$

so ist $r = s$, und man hat

$$f_i(x) \equiv \varphi_i(x) \pmod{p^{\alpha-2\delta}} \; (i = 1, 2, \ldots . r),$$

d. h. kurz gesagt, die Zerlegung in Primfaktoren (mod p^α) ist für den Modul $p^{\alpha-2\delta}$ eindeutig.

Wenn dieser Satz auf das Polynom (1) angewandt wird, so folgt der einfache Satz:

Besitzt $f(x)$ (mod p^α), $\alpha > 2\delta$, die Primfunktionzerlegung

$$f(x) \equiv f_1(x) f_2(x) \ldots . f_s(x) \pmod{p^\alpha},$$

wobei der Grad von $f_i(x)$ gleich n_i ist, so wird die Primzahl p die Primidealzerlegung

$$p = \mathfrak{p}_1^{e_1} \overline{\mathfrak{p}_2}^{e_2} \ldots . \mathfrak{p}_s^{e_s}$$

haben, wobei

$$N(\mathfrak{p}_i^{e_i}) = p^{n_i}.$$

Durch diesen Satz hat man einen Zusammenhang zwischen der Primidealzerlegung und der Form der definierenden Gleichung abgeleitet. Unter Anwendung dieses Satzes erreicht man eine sehr einfache Darstellung von mehreren Gebieten der Idealtheorie, worauf ich doch hier nicht eingehen kann.

Aus dem eben erwähnten Satze folgt, wie man bemerkt, nicht die vollständige Zerlegung von p in Primideale, sondern nur die Auflösung in Primidealpotenzen. Zur Bestimmung der vollständigen Zerlegung habe ich eine Methode angegeben, welche mit der Bestimmung der Reihenentwicklung der algebraischen Funktionen grosse Ähnlichkeit zeigt.

Man untersucht zunächst $f(x)$ (mod p). Wenn dann die Primfunktionzerlegung

$$f(x) \equiv \varphi_1(x)^{a_1} \varphi_2(x)^{a_2} \ldots . \varphi_r(x)^{a_r} \pmod{p}$$

Digitized by Google

besteht, so zeigt man auch, dass eine entsprechende Zerlegung

$$f(x) \equiv \Phi_1(x)\, \Phi_2(x) \ldots . \Phi_r(x) \pmod{p^\alpha}$$

gefunden werden kann, wo α beliebig gross gewählt werden kann und weiter

$$\Phi_i(x) \equiv \varphi_i(x)^{\alpha_i} \pmod{p} \quad (i = 1, 2, \ldots . r) \tag{3}$$

ist. Aus dem Hauptsatze schliesst man dann, dass man jedenfalls eine erste Idealzerfällung von p

$$p = \mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2 \ldots . \mathfrak{a}_r \tag{4}$$

hat, wobei die Ideale $\mathfrak{a}_i$ alle zu einander relativ prim sind.

Um nun die weitere Zerlegung eines Ideals $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_i$ zu untersuchen, geht man folgendermassen vor. Es wird der Kürze wegen $\varphi(x) = \varphi_i(x)$ gesetzt, und man schreibt $f(x)$ in der Form

$$\begin{aligned} f(x) = Q_0(x)\, \varphi(x)^t + Q_1(x)\, p^{\alpha_1}\, \varphi(x)^{t-1} + Q_2(x)\, p^{\alpha_2}\, \varphi(x)^{t-2} \\ + \ldots . + Q_t(x)\, p^{\alpha_t}, \end{aligned} \tag{5}$$

wobei alle Polynome $Q_i(x)$ vom Grade kleiner als m sind, wenn m der Grad von $\varphi(x)$ ist, und weiter sind die Exponenten α_i so gewählt, dass in $Q_i(x)$ nicht alle Koeffizienten durch p teilbar sind, wenn $Q_i(x) \not\equiv 0$. Aus jedem Gliede in der Entwicklung (5) von $f(x)$ erhält man ein entsprechendes Zahlenpaar (i, α_i) und diesen Zahlenpaaren

$$(0, 0)\ (1, \alpha_1) \ldots (t, \alpha_t)$$

werden die entsprechenden Punkte in einem rechtwinkligen Koordinatensystem zugeordnet. Zu diesen Punkten konstruiert man in bekannter Weise das Newtonsche Polygon, und bezeichnet die Seiten dieses Polygons mit

$$S_1, S_2, \ldots S_k.$$

Die Projektionen der Seiten auf die X-achse und Y-achse sollen

$$\begin{aligned} l_1, l_2, \ldots l_k \\ h_1, h_2, \ldots h_k \end{aligned}$$

heissen, und weiter bezeichne e_i den grössten gemeinsamen Faktor von l_i und h_i, so dass

$$l_i = e_i\, \lambda_i, \quad h_i = e_i\, \varkappa_i$$

ist, wobei λ_i zu $\varkappa_i$ relativ prim wird.

Digitized by Google

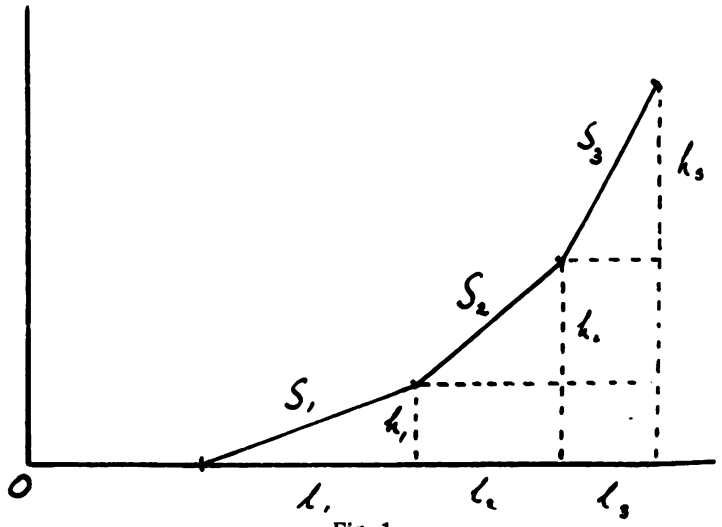


Fig. 1.

Man beweist jetzt, dass ein Faktor $\Phi(x) = \Phi_i(x)$ von $f(x)$ (mod p^a) (3) entsprechend den Seiten des Polygons in weitere Faktoren (mod p^a) zerfällt

$$\Phi(x) \equiv \Psi_1(x)\, \Psi_2(x) \ldots . \Psi_k(x) \pmod{p^a},$$

und daher hat man auch nach dem Hauptsatze die weitere Idealzerlegung des entsprechenden Ideals

$$\mathfrak{a} = A_1\, A_2 \ldots . A_k . \tag{6}$$

Was jetzt übrig bleibt, ist, die Primidealzerlegung eines Ideals A_i zu bestimmen, und dies kann in den meisten Fällen einfach geschehen. Man sucht nämlich in der Entwicklung (5) von $f(x)$ diejenigen Glieder aus, welche durch Punkte auf der Seite S_i abgebildet werden. Bezeichnet man mit $\psi_i(x)$ die Summe dieser Glieder, so findet man, dass $\psi_i(x)$ die Form

$$\psi_i(x) = \varphi(x)^a\, p^\beta\, (Q_{0,i}(x)\, \varphi(x)^{l_i} + Q_{1,i}(x)\, p^{\varkappa_i}\, \varphi(x)^{l_i - \lambda_i} + Q_{2,i}(x)\, \varphi(x)^{l_i - 2\lambda_i}\, p^{2\varkappa_i} + \ldots . + Q_{e_i,i}(x)\, p^{h_i})$$

hat. Aus $\psi_i(x)$ leitet man dann einfach die Funktion

$$F_i(x, y) = Q_{0,i}(x)\, y^{e_i} + Q_{1,i}(x)\, y^{e_i - 1} + \ldots . + Q_{e_i,i}(x)$$

ab, und diese Funktion wird für den Doppelmodul (modd $(p, \varphi(x))$ in Primfaktoren zerlegt

Digitized by Google

$$F_i(x, y) \equiv F_1^{(i)}(x, y)\, F_2^{(i)}(x, y) \ldots . F_{t_i}^{(i)}(x, y) \text{ (modd } p, \varphi(x)),$$

wobei der Grad eines Faktors $F_j^{(i)}(x, y)$ in Bezug auf y mit $\varepsilon_j^{(i)}$ bezeichnet wird. Setzt man nun voraus, dass die Primfunktionen $F_j^{(i)}(x, y)$ alle (modd p, $\varphi(x)$) verschieden sind, so erhält man einfach die Primidealzerlegung des Ideals A_i in (6), indem man

$$A_i = (\mathfrak{p}_1^{(i)} \mathfrak{p}_2^{(i)} \ldots . \mathfrak{p}_{t_i}^{(i)})^{\lambda_i}, \; {}^{\prime}N\mathfrak{p}_j^{(i)} = p^{\varepsilon_j^{(i)} m} \tag{7}$$

zeigt.

Eine Gleichung soll *regulär in Bezug auf p* heissen, wenn für jede Seite des Polygons die Primfunktionen $F_j^{(i)}(x, y)$ (modd p, $\varphi(x)$) von einander verschieden sind und dies für alle Polygone von $f(x)$ gilt, die man also durch verschiedene Wahl des Teilers $\varphi(x)$ von $f(x)$ (mod p) erhält. Wenn die Gleichung (1) in Bezug auf p regulär ist, so folgt aus den Formeln (4), (6) und (7) die Primidealzerlegung von p, und da ich bewiesen habe, dass in jedem Körper reguläre Gleichungen existieren, hat man, wenigstens theoretisch, das Problem der Primidealzerlegung gelöst.

Es gibt mehrere Probleme der Algebra, welche durch die hier angegebene Methode der Newtonschen Polygone behandelt werden können, worauf ich aber hier nicht eingehe. Es soll nur beiläufig eine andere Eigenschaft der Newtonschen Polygone erwähnt werden. Bezeichnet man mit L die Anzahl der Gitterpunkte, welche zwischen dem Polygone, der X-achse und der Endordinate des Polygons liegen (Punkte auf der X-achse oder Endordinate nicht mitgerechnet), so ist der Index k einer regulären Gleichung genau durch

$$p^{\Sigma m L}$$

teilbar, wobei die Summe über alle verschiedene Primfunktionenteiler $\varphi(x)$ von $f(x)$ (mod p) erstreckt werden soll.

Zuletzt möchte ich noch ein wichtiges Problem erwähnen, das der Bestimmung der Primidealzerlegungen sehr nahe steht, nämlich die Bestimmung der Körperdiskriminante.

Dedekind hat hier die Grundlage gegeben, indem er den interessanten Satz bewies: Die Körperdiskriminante ist durch solche, und nur durch solche Primzahlen teilbar, in deren Primidealzerlegung mindestens zwei gleiche Primideale vorkommen.

Weiter wurde auch von Dedekind bewiesen, dass die Dis-

Digitized by Google

kriminante d des Körpers immer als die Norm eines Ideals $\mathfrak{d}$ aufgefasst werden kann

$$|d| = N(\mathfrak{d}). \tag{8}$$

Das Ideal $\mathfrak{d}$ wird die *Differente* des Körpers genannt, und die Untersuchung von d ist daher auf die Untersuchung der Differente $\mathfrak{d}$ zurückgeführt.

Wenn jetzt die Primzahl p genau durch die Potenz $\mathfrak{p}^e$ eines Primideals teilbar ist, wird allgemein die Differente genau durch $\mathfrak{p}^{e-1}$ teilbar. Nur in dem Ausnahmefalle, wo der Exponent e durch p teilbar ist, wird $\mathfrak{d}$ durch $\mathfrak{p}^e$ oder eine höhere Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar. Man kann daher ganz allgemein sagen, dass die Differente genau durch $\mathfrak{p}^{e-1+\varrho}$ teilbar ist, wobei $\varrho = 0$ ist, wenn e nicht durch p teilbar, und $\varrho \geqq 1$, wenn e durch p teilbar ist. Die Zahl ϱ habe ich die Supplementzahl des Primideals $\mathfrak{p}$ genannt. Wenn für alle Primidealteiler von p die entsprechenden Supplementzahlen bekannt sind, so kennt man auch die Potenz von p, welche in der Körperdiskriminante d aufgeht, nämlich nach (8)

$$p^{\sum_{i=1}^{r} f_i (e_i - 1 + \varrho_i)} = p^{n + \sum_{i=1}^{r} f_i (\varrho_i - 1)},$$

wenn

$$p = \mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \ldots . \mathfrak{p}_r^{e_r}, \quad N\mathfrak{p}_i = p^{f_i}$$

die Primidealzerlegung von p ist.

Wie man sieht, lässt Dedekind nur noch die Frage offen, wie man in den Ausnahmefällen die Supplementzahlen untersuchen kann. Er vermutete aber, dass die Supplementzahlen nicht beliebig gross werden könnten, sondern, wenn der Exponent e genau durch p^s teilbar ist, man

$$\varrho \leqq se \tag{9}$$

haben müsse Diese Ungleichheit ist zuerst von Hensel unter Anwendung der Theorie der p-adischen Zahlen bewiesen worden, andere Beweise sind von M. Bauer angegeben worden. Bauer hat auch gezeigt, dass bei geeigneten Körpern diese obere Grenze erreicht werden kann.

Unter Anwendung meiner eben erwähnten Untersuchungen kann man einfach eine Regel angeben, wonach die Supplementzahl ϱ in jedem Falle bestimmt werden kann, und man kann daher ihre Eigenschaften genau studieren. Zunächst folgt daraus

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

ÜBER DIE KORRELATION

VON

J. W. LINDEBERG

1. Das in der mathematischen Statistik am häufigsten angewandte Mass der Abhängigkeit zweier Eigenschaften x und y voneinander ist der Korrelationskoeffizient. Dieses Mass ist indessen, wie recht allgemein anerkannt sein dürfte, in mehreren Hinsichten unbefriedigend. Es hat keine allgemeine, klar fassbare Bedeutung an sich und gibt auch dann, wenn die Regression linear ist, keine direkte Antwort auf irgend eine einfache natürliche Frage.

Es sei $f(x, y)$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion, d. h. eine Funktion, die die Bedingungen

$$f(x, y) \geqq 0, \quad \iint f(x, y)\, dx\, dy = 1$$

erfüllt, wo die Integration, gleichwie in allen folgenden Integralen, über die ganze Ebene zu erstrecken ist. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der Mittelpunkt mit dem Anfangspunkt der Koordinaten zusammenfällt, d. h. dass

$$\iint x f(x, y)\, dx\, dy = \iint y f(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

Weiter benutzen wir die Bezeichnungen

$$\iint x^2 f(x, y)\, dx\, dy = \sigma_x^2, \quad \iint y^2 f(x, y)\, dx\, dy = \sigma_y^2,$$

$$\iint xy f(x, y)\, dx\, dy = p.$$

Der Korrelationskoeffizient ist dann

$$r = \frac{p}{\sigma_x \sigma_y},$$

und die Gleichungen der Regressionsgeraden sind

$$y = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} x, \quad x = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} y.$$

Digitized by Google

Die eigentliche Bedeutung des Korrelationskoeffizienten scheint mir in den Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} \iint \frac{x^2}{\sigma_x^2}\,\frac{y}{x}\,f(x,y)\,dx\,dy &= r\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \\ \iint \frac{y^2}{\sigma_y^2}\,\frac{x}{y}\,f(x,y)\,dx\,dy &= r\,\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \end{aligned}$$

und

$$(2)\qquad \begin{aligned} \iint \left(y - r\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\,x\right)^2 f(x,y)\,dx\,dy &= \sigma_y^2(1-r^2) \\ \iint \left(x - r\,\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\,y\right)^2 f(x,y)\,dx\,dy &= \sigma_x^2(1-r^2) \end{aligned}$$

enthalten zu sein. Es sei angenommen, dass wir über eine Erscheinung, die dem Wahrscheinlichkeitsgesetz $f(x, y)$ folgt, eine Statistik aufgestellt haben und dass wir danach den Mittelwert der erhaltenen Quotienten $\frac{y}{x}$, mit Gewichten genommen, die den Quadraten der x-Werte proportional sind, berechnen. Aus der ersten Gleichung (1) geht hervor, dass der wahrscheinliche Wert dieses Mittelwertes gleich $r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$, also gleich dem Koeffizienten der ersten Regressionsgeraden ist. Gemäss der zweiten Gleichung (1) hat der Koeffizient der zweiten Regressionsgeraden eine analoge Bedeutung. Die Gleichungen (2) besagen, dass die wahrscheinlichen Werte der Quadrate der Abweichungen in vertikaler resp. horizontaler Richtung von den Regressionsgeraden gleich $\sigma_y^2(1-r^2)$ und $\sigma_x^2(1-r^2)$ sind.

Diese Tatsachen scheinen mir nicht die Sonderstellung motivieren zu können, die der Koeffizient r in der Korrelationstheorie einnimmt.

2. Wir wollen die Sache auch von einem anderen Gesichtspunkt aus betrachten. Es seien u und v zwei voneinander unabhängige vom Zufall abhängige Grössen mit den wahrscheinlichen Werten 0 und den Mittelfehlern 1, und es sei angenommen, x und y hingen von diesen Grössen in der Weise ab, dass

$$(3)\qquad \begin{aligned} x &= k_1 u \\ y &= k_2 u + k_3 v, \end{aligned}$$

wo k_1, k_2 und k_3 Konstanten bezeichnen. Fragt man sich, durch welche Funktion der Konstanten die Abhängigkeit zwischen x

Digitized by Google

und y gemessen werden soll, so wird man finden, dass die Antwort, obgleich hier ein wohl definierter Zusammenhang sehr einfacher Art vorliegt, doch gar nicht klar steht. Der Korrelationskoeffizient wird gleich

$$\frac{k_1 k_2}{|k_1| \sqrt{k_2^2 + k_3^2}},$$

und dieser Ausdruck erfüllt zwar gewisse Forderungen, denen das gesuchte Mass genügen muss, aber in dem Begriffe der Abhängigkeit liegt nichts, was uns gerade zu einer solchen Messungsweise der Abhängigkeit zwingen würde. Beispielsweise wäre der Quotient

$$\frac{k_1 k_2}{|k_1 k_3|}$$

ein einfacheres und in gewisser Hinsicht natürlicheres Mass. Wie man auch die Sache betrachtet, muss man gestehen, dass in der Anwendung des Korrelationskoeffizienten als Mass der gegenseitigen Abhängigkeit zweier Eigenschaften etwas Dunkles und Unbefriedigendes liegt.

3. Ich will ein Beispiel anführen, wo dieses Dunkel noch verschärft auftritt. In einer Arbeit von *Rugg* wird eine Vergleichung zwischen den Leistungen der Schüler einer Klasse in Mathematik und in modernen Sprachen mitgeteilt. Die Anzahl der Schüler war 23, und ihre Leistungen waren in Points angegeben. Werden die Schüler nach ihren Pointzahlen in Mathematik geordnet, so ergeben sich die zwei ersten Kolumnen der unten folgenden Tafel. Hier ist die Frage der Abhängigkeit der beiden Eigenschaften voneinander durch die Willkürlichkeit kompliziert, die einer Pointberechnung immer anhaften muss. Die Skalen für x und y können kaum allgemeingültig festgestellt werden. Indessen hängt der Wert des Korrelationskoeffizienten wesentlich von der Skala ab. Wenn z. B. bei einer gewissen Skala alle Punkte x, y auf einer Geraden liegen und somit $|r| = 1$ ist, kann man immer mittels einer kleinen Abänderung der Skala erreichen, dass die Punkte nicht mehr in gerader Linie liegen und $|r|$ also nicht mehr den Wert 1 hat. Es ist deshalb sehr schwer, den aus den Pointzahlen berechneten Korrelationskoeffizienten als Mass der Abhängigkeit zwischen Leistungen in Mathematik und Leistungen in modernen Sprachen zu billigen.

Digitized by Google

Mathematik	Sprachen	Rangnummern		$m\mu$	Korrigierte Werte von x und y	
50	58	1	3	2	— 2,00	— 1,23
66	72	2	5	3	— 1,51	— 0,86
69	78	3	9	6	— 1,23	— 0,33
71	77	4	8	6	— 1,03	— 0,45
72	59	5	4	5	— 0,86	— 1,03
73	86	6	15	9	— 0,71	0,33
74	75	7	6	5	— 0,58	— 0,71
75	80	8	10	4	— 0,45	— 0,22
78	88	9	17	8	— 0,33	0,58
79	84	10	13	7	— 0,22	0,11
80	57	11	2	11	— 0,11	— 1,51
81	89	12	18	6	0	0,71
82	81	13	11	6	0,11	— 0,11
83	92	14	21	7	0,22	1,23
84	76	15	7	10	0,33	— 0,58
85	93	16	22	6	0,45	1,51
86	83	17	12	7	0,58	0
88	85	18	14	6	0,71	0,22
90	50	19	1	18	0,86	— 2,00
92	87	20	16	4	1,03	0,45
94	91	21	20	3	1,23	1,03
96	90	22	19	3	1,51	0,86
97	94	23	23	0	2,00	2,00

Jedenfalls ist es unmöglich, irgendeine Formel des Mittelfehlers von r zu akzeptieren, da seine Variationen zum grossen Teil von Umständen abhängen, die keinen Wahrscheinlichkeitsberechnungen zugänglich sind.

4. Wenn in unserem Beispiel die Schüler sowohl nach ihren Pointzahlen in Mathematik als nach ihren Pointzahlen in Sprachen geordnet werden, so werden jedem Schüler zwei bestimmte Rangnummern zugeordnet. Bilden wir eine Tafel der erhaltenen Rangnummerpaare, so entsteht eine sog. Rangtafel. Die dritte und vierte Kolumne unserer Tafel stellen die unserem Beispiel zugehörige Rangtafel dar. Es ist nun geltend gemacht worden, dass auch in solchen Fällen, wo man keine absoluten Masszahlen zur Verfügung hat, sondern nur Rangtafeln vorliegen, was z. B. in gewissen Untersuchungen aus der Psychologie der Fall ist, die Abhängigkeit zwischen den fraglichen

Digitized by Google

Eigenschaften mittels einer Art von Korrelationskoeffizienten gemessen werden könnte.

Spearman hat zu diesem Zwecke die Zahl ϱ vorgeschlagen, die man erhält, wenn man annimmt, dass die Rangzahlen selbst die Masse der Eigenschaften sind, und den Korrelationskoeffizienten in gewöhnlichem Sinne unter dieser Voraussetzung berechnet.

Pearson geht von der Annahme aus, dass x und y in passender Skala gemessen dem Bravais'schen Gesetz folgen, und zeigt, dass unter dieser Voraussetzung zwischen dem zu diesem Gesetz gehörigen Korrelationskoeffizienten r und *Spearmans* Koeffizient ϱ die Gleichung

$$r = 2 \sin \frac{\pi}{6} \varrho$$

annähernd besteht. Er schlägt die mittels dieser Gleichung aus ϱ erhaltene Zahl r als Mass der Abhängigkeit vor.

In einer in dem letzten Hefte der Skandinavisk Aktuarietidskrift, Jahrgang 1924, erschienenen Arbeit wird diese Frage von Herrn *Esscher* behandelt. Er schliesst sich hauptsächlich *Pearson* an, schlägt aber vor, r in anderer Weise zu berechnen. Der Kürze halber wollen wir sagen, dass zwei Individuen, von welchen das eine in bezug auf beide Eigenschaften höheren Rang hat, ein positives Paar bilden, während zwei Individuen, von welchen das eine in bezug auf die eine Eigenschaft und das andere in bezug auf die andere Eigenschaft den höheren Rang hat, ein negatives Paar bilden. Herr *Esscher* bestimmt das Verhältnis p zwischen der Anzahl positiver Paare und der totalen Anzahl Paare, die aus den Individuen der Tafel geformt werden können, und berechnet sodann r mittels der von *Greiner* aufgestellten Formel

$$r = \sin \pi \left(p - \frac{1}{2} \right), \tag{4}$$

die, falls das Zahlenpaar x, y dem Bravais'chen Gesetz folgt, für den Korrelationskoeffizienten r und die Wahrscheinlichkeit p, dass zwei unabhängig voneinander ausgefallene Wertsysteme x_1, y_1 und x_2, y_2 ein positives Paar bilden, exakt gilt.

Wenn die Anwendung des Korrelationskoeffizienten in gewöhnlichen Fällen schon Bedenken erregen muss, so ist dies in noch weit höherem Grade mit den obigen Ausdehnungen der

Digitized by Google

Fall. Es unterliegt keinem Zweifel, dass keines von den erwähnten Verfahren richtig sein kann.

5. Im folgenden will ich hinsichtlich der Behandlung des Korrelationsproblems einen neuen Vorschlag machen, der sowohl Rangtafeln als gewöhnliche Korrelationstafeln betrifft.

Wir wollen annehmen, dass aus einer Population blindlings zwei Individuen A und B herausgegriffen worden sind, und dass man festgestellt hat, dass A in bezug auf die Eigenschaft x einen höheren Rang als B hat. Wie gross ist unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit, dass A auch in bezug auf die Eigenschaft y einen höheren Rang als B einnimmt? Das ist eine Frage von wesentlicher Bedeutung für die Beurteilung der Abhängigkeit zwischen den Eigenschaften, und eine Frage, die gestellt werden kann, mag nun eine bestimmte Skala vorliegen oder nicht. Mit der im Obigen eingeführten Ausdrucksweise lautet die Frage: was ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei aus der Population blindlings herausgegriffene Individuen ein positives Paar bilden? Die von Herrn *Esscher* als Hilfsgrösse eingeführte Zahl p ist der beste Wert dieser Wahrscheinlichkeit, der aus einer gegebenen Tafel erhalten werden kann, und vielleicht wäre diese Zahl geeignet, als Grundcharakteristik angewandt zu werden. Verschiedene praktische Gründe sprechen indessen zu Gunsten der Grösse

$$P = 100\ p - 50, \tag{5}$$

die in Prozenten der totalen Anzahl Paare angibt, um wieviel die Anzahl der positiven Paare die halbe Totalanzahl übersteigt. Für diese Zahl möchte ich den Namen *Korrelationsprozent* vorschlagen.

Ein positiver Wert des Korrelationsprozentes bedeutet, dass die Eigenschaften, wenn man von Individuum zu Individuum geht, häufiger in der gleichen als in entgegengesetzter Richtung variieren, ein negativer Wert bedeutet, dass die Sache sich umgekehrt verhält, und der Wert Null gibt an, dass Variationen der beiden Arten gleich oft vorkommen. Falls die Eigenschaften in gewöhnlichem Sinne unabhängig voneinander sind, ist offenbar der wahrscheinliche Wert des Korrelationsprozentes gleich Null.

6. Wenn q die relative Anzahl negativer Paare bezeichnet, d. h. wenn $q = 1 - p$, so ist auch

$$P = 50 - 100\ q. \tag{6}$$

Digitized by Google

Falls das Korrelationsprozent positiv ist, ergibt sich im allgemeinen q einfacher als p aus der Tafel, und P berechnet sich deshalb in diesem Falle am besten aus (6).

Der Mittelfehler von P ergibt sich, wenn man beachtet, dass hinsichtlich der gleich grossen Mittelfehler $\varepsilon(p)$ und $\varepsilon(q)$ die folgenden Gleichungen annähernd bestehen:

$$\varepsilon^2(p) = \frac{2pq}{n(n-1)} + 4\frac{n-2}{n(n-1)}(k-p^2)$$

(7)

$$\varepsilon^2(q) = \frac{2pq}{n(n-1)} + 4\frac{n-2}{n(n-1)}(l-q^2).$$

Hier bedeutet n die Anzahl Individuen der Tafel und k und l sind Näherungswerte der Wahrscheinlichkeiten, dass von drei aus der Population blindlings herausgegriffenen Individuen z. B. das erste mit den beiden anderen positive resp. negative Paare bildet. Die Herleitung dieser Gleichungen bietet keine Schwierigkeiten dar, ich kann aber nicht näher auf sie eingehen.

In unserem Beispiel werden P und der Mittelfehler $\varepsilon(P)$ am einfachsten aus (6) und der zweiten Gleichung (7) erhalten. Die Rechnung stellt sich, wie folgt. Zu jedem Individuum der Tafel wird die Anzahl m_μ der anderen Individuen notiert, die mit jenem negative Paare bilden. Est ist dann, wie man leicht einsieht,

$$q = \frac{\Sigma m_\mu}{n(n-1)} = 0,2\,8\,1$$

und

$$l = \frac{\Sigma m_\mu^2}{n(n-1)^2} = 0,1\,0\,4\,6.$$

Durch Einsetzen ergibt sich hieraus $P = +\,21{,}9$ und $\varepsilon(P) = 7{,}1$, und das Endresultat wird demgemäss

$$P = +\,2\,1,9 \pm 7,1.$$

7. Falls eine gewöhnliche Korrelationstafel mit bestimmter Skala vorliegt, kann das Korrelationsprozent und dessen Mittelfehler prinzipiell in der gleichen Weise erhalten werden. Da aber die Rechnungen hierbei langwierig werden können, will ich darauf aufmerksam machen, dass man, falls die Verteilung einigermassen normal ist und man sich mit einem angenäherten Werte von P begnügt, die Formel

Digitized by Google

(8) $$P = \frac{100}{\pi} \arcsin r$$

benutzen kann, die unmittelbar aus (4) und (5) folgt.

Da die Formel (4) sehr wichtig zu sein scheint, andererseits aber sehr einfach ableitbar ist, will ich hier eine Herleitung derselben mitteilen. Wir wollen annehmen, dass die Grössen u und v in (3) dem Gauss'schen Gesetz folgen. Das Zahlenpaar x, y folgt dann dem Bravais'schen Gesetz und zwar können alle möglichen Formen dieses Gesetzes erhalten werden, indem man k_1, k_2 und k_3 geeignete Werte erteilt, wobei k_1 und k_3 immer positiv angenommen werden können. Weiter findet man leicht, dass die Wahrscheinlichkeit p, dass zwei unabhängig voneinander ausgefallene Wertsysteme x_1, y_1 und x_2, y_2 ein positives Paar bilden, gleich der Wahrscheinlichkeit ist, dass das Produkt xy positiv ausfällt. Damit dies der Fall sei, müssen wieder u und v so ausfallen, dass, wenn man sie als rechtwinkelige Koordinaten einer uv-Ebene deutet, der Punkt u, v in das von den Geraden $u = 0$ und $k_2 u + k_3 v = 0$ gebildete Vertikalwinkelpaar fällt, dessen linke Seite die v-Achse bildet. Bezeichnen wir die Grösse dieses Winkels mit φ, so wird also

$$p = \frac{\varphi}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{k_2}{k_3} = \frac{1}{2} + \frac{\arcsin r}{\pi},$$

womit die Formel (4) bewiesen ist.

Berechnen wir r in gewöhnlicher Weise aus den Zahlen der zwei ersten Kolumnen unserer Tafel, und setzen wir den erhaltenen Wert in (8) ein, so ergibt sich

$$P = 15{,}0.$$

Dieser Wert weicht recht bedeutend von dem früher gefundenen 21,9 ab. Im allgemeinen dürfte jedoch bessere Übereinstimmung zu erwarten sein, denn, wie Herr *Esscher* in seiner Arbeit bemerkt, setzt die Formel (4) eigentlich nur voraus, dass das Zahlenpaar $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ dem Bravais'schen Gesetz folgt, was annäherungsweise der Fall sein kann, auch wenn das Gesetz des Zahlenpaares x, y bedeutend von dem Bravais'schen abweicht.

8. Ein noch besseres Resultat ist zu erwarten, wenn man das obige Verfahren etwas modifiziert. Da das Korrelationsprozent gar nicht von den absoluten, sondern nur von den relativen Grössen der Varianten abhängt, ist man berechtigt, den ver-

Digitized by Google

schiedenen Varianten irgendwelche Zahlenwerte zuzuschreiben, sofern nur die Ordnung beibehalten wird. Diesen Umstand kann man benutzen, um eine bessere Übereinstimmung mit dem Bravais'schen Gesetze zu erreichen, was am einfachsten dadurch geschieht, dass man die x- und y-Werte in der Weise korrigiert, dass sie beide für sich gemäss dem Gauss'schen Gesetz verteilt werden. Die Zahlen der zwei letzten Kolumnen unserer Tafel sind in dieser Weise bestimmt worden. Die Streuungen der x- und y-Werte sind gleich 1, und man hat also nur die Summe der verschiedenen Produkte xy mit 23 zu dividieren, um den korrigierten Wert von r zu erhalten. Wird dieser Wert in (8) eingeführt, so ergibt sich

$$P = + 17{,}6,$$

welches Resultat etwas besser ist als das aus dem unkorrigierten Wert von r erhaltene.

9. Hauptsächlich habe ich hervorheben wollen, dass der Korrelationskoeffizient unmöglich als Mass der Abhängigkeit zweier Eigenschaften voneinander angenommen werden kann, wo keine klare Skala feststeht. Wie aus dem Obigen hervorgeht, bin ich aber auch der Ansicht, dass der übliche Gebrauch des Korrelationskoeffizienten auch sonst unberechtigt ist. Herr *Cramér* hat in einer in dem letzten Heft der Skandinavisk Aktuarietidskrift, Jahrgang 1924, erschienenen Arbeit eine neue Korrelationstheorie vorgelegt. Der hierin vorgeführte Gedanke ist von grossem Interesse, die Definition des neuen Masses der Abhängigkeit scheint mir aber zu kompliziert zu sein, um allgemein in Gebrauch genommen werden zu können. Was das von mir vorgeschlagene Korrelationsprozent betrifft, möchte ich geltend machen, dass dasselbe nicht nur theoretische Berechtigung hat, sondern auch gut geeignet ist, im praktischen Gebrauch den Korrelationskoeffizienten zu ersetzen.

Der Korrelationskoeffizient hat, ich wiederhole es nochmals, keine anschauliche selbständige Bedeutung, und seine Anwendung als Mass der Abhängigkeit zwischen Eigenschaften bringt in die Korrelationstheorie eine Unklarheit, die schwerlich geduldet werden kann. Das Korrelationsprozent dagegen gibt eine direkte Antwort auf eine bestimmte einfache Frage, die ihre Bedeutung behält unabhängig von dem allgemeinen Charakter der Korrelation und unabhängig davon, ob eine bestimmte Skala vorliegt oder nicht.

Digitized by Google

Falls die Skala bestimmt ist, wird man sich vielleicht oft veranlasst sehen, ausser dem Korrelationsprozent auch andere ergänzende Charakteristiken zu berechnen. Dies ist aber eine Sache für sich, worauf ich in diesem Zusammenhang nicht näher eingehen kann.

Digitized by Google

ÜBER DIE BESTIMMUNG EINES SYSTEMS VON KONSTANTEN UND CHARAKTERISTISCHEN FUNKTIONEN EINER FUNKTION ZWEIER VARIABLEN IN BEZIEHUNG AUF EINEN GEGEBENEN KERN $K(s, t)$.

VON

JOHANNES MOLLERUP

Einleitung.

Es sei $K(s, t)$ ein im Quadrate $a \leqq \begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \leqq b$ stetiger unsymmetrischer Kern mit den Konstanten

$$\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots\ldots$$

d. h. mit den Eigenwerten

$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma_1}}, \frac{1}{\sqrt{\Gamma_2}} \ldots\ldots;$$

diese Eigenwerte sind durch die adjungierten homogenen Gleichungen

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\, \psi(t)\, dt$$

$$\psi(s) = \lambda \int_a^b K(t, s)\, \varphi(t)\, dt$$

definiert; die entsprechenden Lösungen bestimmen das vollständige Orthogonalsystem.[1]) Der *Schmidt-Hilbert'sche Entwickelungssatz* sagt aus, dass eine Funktion

$$\overline{g_1}(s) = \int_a^b K(s, t)\, g(t)\, dt$$

[1]) *Erhard Schmidt*, Entwickelung willkürlicher Funktionen, Math. Ann. 63. pag. 433—476.

Digitized by Google

sich in Fourier'scher Art im Systeme φ entwickeln lässt:

$$\overline{g_1}(s) = \Sigma\, a_n\, \varphi_n(s), \quad a_n = \int_a^b \overline{g_1}(t)\, \varphi_n(t)\, dt,$$

und dass eine Funktion

$$\underline{g_1}(s) = \int_a^b K(t, s)\, g(t)\, dt$$

sich im Systeme ψ entwickeln lässt:

$$\underline{g_1}(s) = \Sigma\, b_n\, \psi_n(s), \quad b_n = \int_a^b \underline{g_1}(t)\, \psi(t)\, dt.$$

Wir reduzieren jetzt diese beiden Entwickelungen in der Weise, dass wir *sämtliche verschwindende Glieder weglassen* und ausserdem *die übrigbleibenden Glieder* in der Weise *gruppieren*, dass nunmehr jedem Eigenwert nur ein einziges Glied entspricht. Die Entwickelungen werden jetzt geschrieben:

$$\overline{g_1}(s) = \sum_\nu \overline{G}^{(\nu)}(s), \quad \underline{g_1}(s) = \sum_\nu \underline{G}^{(\nu)}(s).$$

Diese Reihen wurden *direkt* durch ein Verfahren bestimmt, das von Herrn Vergerio und Verf. gefunden ist[2)3)], nämlich das folgende:

1) *Iteration oben*: $\overline{g}_1(s) = \int_a^b K(s, t)\, g(t)\, dt$, $\overline{g}_{2n}(s) = \int_a^b K(t, s)\, \overline{g}_{2n-1}(t)\, dt$,

$$\overline{g}_{2n+1}(s) = \int_a^b K(s, t)\, \overline{g}_{2n}(t)\, dt$$

2) *Konstantenbestimmung*:

$$V_n = \int_a^b \overline{g}_n(s)^2\, ds, \quad \overline{g}_n = \frac{V_{n+1}}{V_n} \to \overline{G}_1$$

3) *Gleichmässiger Grenzübergang*: $\dfrac{\overline{g}_{2n}(s)}{G_1^n} \to \overline{G}^{(1)}(s)$, $\dfrac{\overline{g}_{2n+1}(s)}{G_1^n} \to \overline{G}_1^{(1)}(s)$

4) *Reduktion*: $\overline{g}^{(2)}(s) = g(s) - \overline{G}^{(1)}(s)$.

[2)] *A. Vergerio.* Sulle equazioni integrali di prima specie a nucleo non simmetrico, Rend. di Palermo, XLII, pp. 285—302.

[3)] *J. Mollerup*, Sur l'itèration d'une fonction par un noyau donné, Rend. di Palermo XLVII, pp. 375—395.

Digitized by Google

In dieser Weise fährt man jetzt fort, indem man von $\overline{g}^{(2)}(s)$ ausgeht. Genau ebenso bildet man:

1) *Iteration unten:* $\underline{g}_1(s) = \int_a^b K(t,s)\, g(t)\, dt$, $\underline{g}_{2n}(s) = \int_a^b K(s,t)\, \underline{g}_{2n-1}(t)\, dt$,

$$\underline{g}_{2n+1}(s) = \int_a^b K\ (t,s)\, \underline{g}^{(2)}_{2n}(t)\, dt$$

2) *Konstantenbestimmung:* $\underline{V}_n = \int_a^b \underline{g}_n(s)^2\, ds$; $\underline{g}_n = \frac{\underline{V}_{n+1}}{\underline{V}_n} \to \underline{G}_1$.

3) *Gleichmässigen Grenzübergang:* $\frac{\underline{g}_{2n}(s)}{\underline{G}_1^n} \to \underline{G}^{(1)}(s)$, $\frac{\underline{g}_{2n+1}(s)}{\underline{G}_1^n} \to \underline{G}_1^{(1)}(s)$

4) *Reduktion:* $\underline{g}^{(2)}(s) = g(s) - \underline{G}^{(1)}(s)$

Es entstehen in dieser Weise 2 Systeme von Konstanten:

$$\overline{G}_1,\ \overline{G}_2 \ldots . u.\ \ \underline{G}_1,\ \underline{G}_1 \ldots .,$$

die beide dem vollständigen Konstantensystem

$$\Gamma_1,\ \Gamma_2 \ldots$$

angehören, und 4 Orthogonalsysteme:

$$\overline{G}^{(1)}(s),\ \overline{G}^{(2)}(s) \ldots ; \qquad \overline{G}_1^{(1)}(s),\ \ \overline{G}_1^{(2)}(s) \ldots$$

$$\underline{G}^{(1)}(s),\ \underline{G}^{(2)}(s) \ldots ; \qquad \underline{G}_1^{(1)}(s),\ \ \underline{G}_1^{(2)}(s) \ldots$$

Es lauten jetzt die Entwickelungssätze [4])

$$\overline{g}_1(s) = \int_a^b K(s,\ t)\, g(t)\, dt = \sum \overline{G}_1^{(\nu)}(s)$$

$$\underline{g}_1(s) = \int_a^b K(t,\ s)\, g(t)\, dt = \sum \underline{G}_1^{(\nu)}(s).$$

Es verschwindet kein Glied dieser Reihen, dieselben können aber speziell endliche Summen sein.

Wenden wir dasselbe Verfahren auf den Kern selbst an, erhalten wir zwei zusammenfallende Konstantensysteme:

$$\Gamma_1,\ \Gamma_2 \ldots .$$

[4]) *A. Vergerio* l. c. pp. 298—299. *J. Mollerup* l. c. p. 388.

Digitized by Google

und 4 Orthogonalsysteme:

$$\overline{H}^{(1)}(s,t),\ \overline{H}^{(2)}(s,t)\ldots.;\ \overline{H}_1^{(1)}(s,t),\ \overline{H}_1^{(2)}(s,t),\ldots.$$
$$\underline{H}^{(1)}(s,t),\ \underline{H}^{(2)}(s,t)\ldots.;\ \underline{H}_1^{(1)}(s,t),\ \underline{H}_1^{(2)}(s,t),\ldots.$$

Mittels dieser Funktionen kann man die Folgen: $\overline{G}_1, \overline{G}_2\ldots.$; $\underline{G}_1, \underline{G}_2\ldots.$ aus der Folge: $\Gamma_1, \Gamma_2\ldots.$ herausgreifen, nämlich:[5])

Ist $\int_a^b \overline{H}^{(1)}(s,t)\,g(t)\,dt \neq 0$, $\overline{G}_1 = \Gamma_1$; ist $\int_a^b \underline{H}^{(1)}(s,t)\,g(t)\,dt = 0$, $\int_a^b \underline{H}^{(2)}(s,t)\,g(t)\,dt \neq 0$, $\overline{G}_1 = \Gamma_2$ u. s. w; ist $\overline{G}_1 = \Gamma_\nu$, dann ist $\overline{G}^{(1)}(s) = \int_a^b \overline{H}^{(\nu)}(s,t)\,g(t)\,dt \neq 0$.

In ähnlicher Weise findet man die andere Folge: $\underline{G}_1, \underline{G}_2\ldots.$

§ 1. *Das Konstantensystem einer Funktion zweier Variablen.*

Es sei $g(s,t)$ eine stetige Funktion zweier Variablen, $a \leqq \begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \leqq b$; ersetzen wir die Variable t durch einen Parameterwert t_1, finden wir in der eben geschilderten Weise zwei entsprechende Konstantenfolgen $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \ldots.; \underline{G}_1, \underline{G}_2\ldots.$ Um diese Folgen aus der Konstantenfolge: $\Gamma_1, \Gamma_2\ldots.$ zu bestimmen, betrachten wir die Gleichung:

$$\int_a^b \underline{H}^{(1)}(s,t)\,g(t,t_1)\,dt = 0\,. \tag{1}$$

Die Funktionen $g(s,t)$, welche dieser Gleichung genügen, sind in der Formel:

$$g(s,t_1) = \chi(s,t_1) - \int_a^b \underline{H}^{(1)}(s,t)\,\chi(t,t_1)\,dt \tag{2}$$

enthalten, wo $\chi(s,t)$ eine beliebige stetige Funktion ist. Dass jede Lösung $g(s,t_1)$ von (1) in (2) enthalten ist, sieht man dadurch, dass man eine entsprechende stetige Funktion $\chi(s,t_1)$ einfach durch

[5]) *J. Mollerup* loc. cit. pp. 385—388.

Digitized by Google

(3) $$\chi(s, t_1) = g(s, t_1) + \underline{H}_1^{(1)}(s, t_1)$$

bestimmt; hierdurch wird (2) in dieser Weise genügt:

$$g(s, t_1) + \underline{H}_1^{(1)}(s, t_1) - \int_a^b \underline{H}^{(1)}(s, t)\, g(t, t_1)\, dt - \int_a^b \underline{H}^{(1)}(s, t)\, \underline{H}_1^{(1)}(t, t_1)\, dt = g(s, t_1),$$

weil

$$\underline{H}_1^{(1)}(s, t_1) = \int_a^b \underline{H}^{(1)}(s, t)\, \underline{H}_1^{(1)}(t, t_1)\, dt$$

und

$$\int_a^b \underline{H}^{(1)}(s, t)\, g(t, t_1)\, dt = 0.$$

Umgekehrt sehen wir sofort durch Einsetzen, dass (2) immer (1) genügt:

$$\int_a^b \underline{H}^{(1)}(s, t)\, \chi(t, t_1)\, dt - \int_a^b \int_a^b \underline{H}^{(1)}(s, t)\, \underline{H}^{(1)}(t, u)\, \chi(u, t_1)\, dt\, du = 0,$$

weil

$$\int_a^b \underline{H}^{(1)}(s, t)\, \underline{H}^{(1)}(t, u)\, dt = \underline{H}^{(1)}(s, u).$$

Hieraus ist aber sofort ersichtlich, dass wenn (1) mit einem Wert t_1 genügt wird, dann wird (1) auch mit jedem anderen Parameterwert genügt d. h. *die Relationen*

$$\int_a^b \underline{H}^{(1)}(s, t)\, g(t, t_1)\, dt \mp 0$$

sind vom Parameterwert t_1 unabhängig. Hieraus folgt aber nach dem Schlusssatz der Einleitung: *Die Relation*

$$\bar{G}_1 \pm \bar{\Gamma}_1$$

ist vom Parameterwert t_1 unabhängig. In genau derselben Weise sehen wir die Richtigkeit des folgenden allgemeinen Satzes ein:

Es gehört zu einer gegebenen stetigen Funktion $g(s, t)$ zwei Konstantenfolgen:

$$\bar{G}_1, \bar{G}_2 \ldots.$$
$$\underline{G}_1, \underline{G}_2 \ldots.$$

die dadurch bestimmt werden, dass man statt t einen beliebigen Parameterwert einsetzt und iteriert.

Digitized by Google

§ 2. *Die charakteristischen Funktionen einer Funktion zweier Variablen.*

Indem wir jetzt wieder die Variable t durch den Parameterwert t_1 ersetzen, haben wir den Grenzübergang

$$\frac{\overline{g}_{2n}(s, t_1)}{\overline{G}_1^n} \to \overline{G}^{(1)}(s, t_1)$$

in Betracht zu ziehen. Dieser Grenzübergang ist ja gleichmässig in s, und die Grenzfunktion $\overline{G}^{(1)}(s, t_1)$ ist eine stetige Funktion von s. Es sei z. B.

$$\overline{G}_1 = \Gamma_\mu .$$

Dann ist, nach dem Schlusssatz der Einleitung:

$$\overline{G}^{(1)}(s, t) = \int_a^b H^{(\mu)}(s, t)\, g(t, t_1)\, dt ,$$

wonach $\overline{G}^{(1)}(s, t_1)$ eine stetige Funktion der beiden Variablen ist, was ja auch schon nach den einleitenden Bemerkungen klar war. In derselben Weise gilt der allgemeine Satz:

Es gehören zu einer gegebenen stetigen Funktion $g(s, t)$ 4 Folgen von charakteristischen Funktionen:

$$\begin{aligned}
&\overline{G}^{(1)}(s, t),\ \overline{G}^{(2)}(s, t) \ldots . \\
&\overline{G}_1^{(1)}(s, t),\ \overline{G}_1^{(2)}(s, t) \ldots . \\
&\underline{G}^{(1)}(s, t),\ \underline{G}^{(2)}(s, t) \ldots . \\
&\underline{G}_1^{(1)}(s, t),\ \underline{G}_1^{(2)}(s, t) \ldots ,
\end{aligned}$$

die dadurch bestimmt werden, dass man statt t einen beliebigen Parameterwert einsetzt; diese Funktionen sind alle stetige Funktionen der zwei Variablen.

Dagegen darf man natürlicherweise nicht behaupten, dass der Grenzübergang

$$\frac{\overline{g}_{2n}(s, t_1)}{\overline{G}_1^n} \to \overline{G}^{(1)}(s, t_1)$$

gleichmässig in beiden Variablen stattfindet.

Digitized by Google

§ 3. *Die Entwickelungssätze.* Diese Sätze lauten so:

$$\text{Es ist } \overline{g}_1(s, t_1) = \int_a^b K(s, t)\, g(t, t_1)\, dt = \sum_\nu \overline{G}_1^{(\nu)}(s, t_1)$$

$$\text{und } \underline{g}_1(s, t_1) = \int_a^b K(t, s)\, g(t, t_1)\, dt = \sum_\nu \underline{G}_{-1}^{(\nu)}(s, t_1),$$

wo die Glieder der Reihen stetige Funktionen der beiden Variablen s *und* t_1 *sind, und wo die Reihen in jedem Punkte* (s, t_1), $a \leqq \begin{matrix} s \\ t_1 \end{matrix} \leqq b$, *absolut konvergieren; ausserdem ist die Konvergenz auf jeder Geraden* $t_1 = Const.$ *gleichmässig in* s.

Wenden wir unmittelbar den *Schmidt-Hilbertschen* Entwickelungssatz an, erhalten wir die Gleichung:

$$\overline{g}_1(s, t_1) = \Sigma \varphi_n(s) \int_a^b \overline{g}_1(t, t_1)\, \varphi_n(t)\, dt = \Sigma\, \overline{G}_1^{(\nu)}(s, t_1),$$

wo die letzte Reihe aus der ersten dadurch entsteht, dass die verschwindenden Glieder weggelassen und die anderen Glieder gruppiert werden; nach dem vorhergehenden sind also die Glieder der letzten Reihe für jeden Parameterwert dieselben.

Ebenso wie die Richtigkeit dieser Sätze nach dem vorhergehenden ohne weiteres einleuchtet, so folgt auch die Anwendung auf Integralgleichungen:

Es sei vorgelegt *die Gleichung erster Art*:

$$\overline{g}_1(s, t_1) = \int_a^b K(s, t)\, g(t, t_1)\, dt,$$

wo der Kern *geschlossen* ist, d. h. die Gleichung

$$\int_a^b K(s, t)\, g(t)\, dt = 0$$

ist nur für $g(s) \equiv 0$ erfüllt; damit diese Gleichung mit Rücksicht auf $g(s, t)$ lösbar ist, ist notwendig und hinreichend:

1) $\overline{g}_1(s, t_1) = \Sigma\, \overline{G}_1^{(\nu)}(s, t_1)$ (Konvergenz absolut und ausserdem gleichmässig in s).

Digitized by Google

2) $\Sigma\, \overline{G}^{(\nu)}(s, t)$ konvergiert in s für jeden Wert von t_1 (mindestens im Mittel). $\Sigma\, \overline{G}^{(\nu)}(s, t_1)$ repräsentiert dann die Lösung.[6] [7])

Wir betrachten als zweites Beispiel *die Gleichung zweiter Art (die Fredholm'sche Gleichung)* mit symmetrischem Kern:

$$u(s, t_1) = h(s, t_1) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, h(t, t_1)\, dt;$$

es seien die Konstanten der gegebenen Funktion $u(s, t_1)$: $U_1, U_2 \ldots$

Ist λ kein Eigenwert des Kerns $K(s, t)$, dann hat die Gleichung eine und nur eine Lösung, nämlich *entweder*

$$h(s, t_1) = u(s, t_1) + \sum_{\mu} \frac{\lambda\, U_1^{(\mu)}(s, t_1) + \lambda^2\, U_\mu\, U^{(\mu)}(s, t_1)}{1 - \lambda^2\, U_\mu} \quad \left(\text{wenn } \lambda^2 \neq \frac{1}{U_\mu} \text{ für alle } \mu\right)$$

oder

$$h(s, t_1) = u(s, t_1) + \sum_{\mu \neq \nu} \frac{\lambda\, U_1^{(\mu)}(s, t_1) + \lambda^2\, U_\mu\, U^{(\mu)}(s, t_1)}{1 - \lambda^2\, U_\mu} - \frac{1}{2}\, U^{(\nu)}(s, t_1)$$

$$\left(\text{wenn } \lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{U_\nu}},\ -\lambda \text{ also Eigenwert}\right);$$

die Reihen konvergieren absolut in jedem Punkte (s, t_1) und gleichmässig auf jeder Geraden $t = t_1$.

Ist λ einer der Eigenwerte $\frac{1}{\pm \sqrt{U_\nu}}$, dann hat die Gleichung keine Lösung.

Ist λ irgend ein anderer Eigenwert, dann hat die Gleichung die Lösungen

$$h(s, t_1) = u(s, t_1) + \sum_{\mu} \frac{\lambda\, U_1^{(\mu)}(s, t_1) + \lambda^2\, U_\mu\, U^{(\mu)}(s, t_1)}{1 - \lambda^2\, U_\mu} + G^{(\nu)}(s, t_1);$$

$G^{(\nu)}(s, t)$ ist eine beliebige Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung, die unten gelöst wird.

§ 4. *Die homogenen Gleichungen.* Der Gleichung erster Art

$$\overline{g}_1(s, t) = \int_a^b K(s, t)\, g(t, t_1)\, dt$$

---

[6]) *J. Mollerup: Eksplicit Løsning af Integralligningen af 1ste Art,* Festskrift til J. Hjelmslev (Mat. Tidsskrift B, 1923). pp. 47—58.

[7]) *A. Vergerio*: l. c. § 7.

Digitized by Google

entspricht die homogene Gleichung:

$$0 = \int_a^b K(s, t)\, g(t, t_1)\, dt,$$

die nur für einen nicht geschlossenen Kern lösbar ist; jede Lösung der homogenen Gleichung enthält einen unbestimmten Faktor, nämlich eine beliebige stetige Funktion von t_1.

Jede stetige Lösung ist in der Formel:

$$g(s, t) = i(s, t) - \Sigma\, \overline{I}^{(\nu)}(s, t)$$

enthalten, wo $i(s, t)$ eine beliebige stetige Funktion ist, die nicht selbst der homogenen Gleichung genügt, und wo die entsprechende Reihe $\Sigma\, \overline{I}^{(\nu)}(s, t)$ gegen eine andere stetige Funktion konvergiert, jedenfalls für einen festen Wert von t im Mittel in s.

Der Fredholm'schen Gleichung entspricht die homogene Gleichung

$$h(s, t_1) = \lambda \int_a^b K(s, t)\, h(t, t_1)\, dt,$$

wo λ ein Eigenwert sein muss, $\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{\Gamma_\mu}}$; ist λ ein n-facher Eigenwert mit den linear unabhängigen Eigenfunktionen $a_1(s)$, $a_2(s) \ldots a_n(s)$, dann ist jede Lösung in der Formel

$$h(s, t_1) = \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu(s)\, b_\mu(t_1),$$

wo die $b_\mu(t_1)$ beliebige stetige Funktionen sind, enthalten.

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR DES SUITES RÉGULIÈRES

PAR

A. F. ANDERSEN

1. Dans la théorie de la sommabilité de *Cesàro* on est assez souvent amené à s'occuper des suites qui présentent une certaine régularité. Il s'agit *des suites convergentes* (ε_ν), dont la régularité se révèle par le fait que l'ordre de grandeur des différences $\Delta^p \varepsilon_\nu$ pour $\nu \to \infty$ va en décroissant lorsque l'ordre de la différence, p, augmente, et précisément de façon que $\Delta^1 \varepsilon_\nu = o(\nu^{-1})$, $\Delta^2 \varepsilon_\nu = o(\nu^{-2})$ etc. jusqu'à un certain ordre q: $\Delta^q \varepsilon_\nu = o(\nu^{-q})$. J'essaierai de préciser ici le caractère de cette régularité. Cependant, visant à satisfaire aux besoins de la théorie de la sommabilité à indices quelconques aussi bien qu'à ceux de la théorie de la sommabilité à indices entiers et positifs, il faut me placer à un point de vue plus général en regardant, non seulement les différences habituelles, mais aussi les différences $\Delta^\varrho \varepsilon_\nu$, ou ϱ désigne un nombre réel quelconque. Ayant autrefois[1]) traité d'une manière assez approfondie des différences de ce genre, je me bornerai ici à répéter la définition que j'ai adoptée.

Posons

$$\binom{n+r}{n} = A_n^{(r)}$$

pour faire sauter aux yeux que l'ordre de grandeur du coefficient binomial $\binom{n+r}{n}$ est celui de n^r; avec cette notation on a pour tout nombre entier et positif s

$$\Delta^s \varepsilon_\nu = \sum_{p=0}^{s} (-1)^p \binom{s}{p} \varepsilon_{\nu+p} = \sum_{p=0}^{s} A_p^{(-s-1)} \varepsilon_{\nu+p}; \tag{1}$$

si l'on prend cette expression pour base de l'extension désirée de la définition des différences, on trouvera assez naturel de

[1]) Studier over Cesàro's Summabilitetsmetode, Thèse, Copenhague 1921.

Digitized by Google

poser pour r réel quelconque

$$(2) \qquad \Delta^r \varepsilon_\nu = \sum_{p=0}^{\infty} A_p^{(-r-1)} \varepsilon_{\nu+p},$$

cette expression se réduisant formellement à (1) quand r devient égal à s.

Cette définition implique évidemment une question de convergence; nous ne considérons ici que les cas où la série (2) converge dans le sens ordinaire de ce terme, laissant de côté tous les cas où la série peut être sommée par telle ou telle méthode de sommabilité, et, bien entendu, ceux où cela ne peut même pas se faire. Comme les suites (ε_ν) dont nous nous occupons ici tendent vers une limite, les différences $\Delta^r \varepsilon_\nu$ se trouvent alors bien définies pour $r>0$, la série (2) étant absolument convergente pour ces valeurs de r; mais, cela va sans dire, ces différences peuvent bien exister lors même que r est plus petit que zéro.

2. Nous appellerons *régulière d'ordre r toute suite convergente* (ε_ν) *qui satisfait aux conditions*

$$\Delta^\varrho \varepsilon_\nu = o(\nu^{-\varrho}) \text{ pour } 0 < \varrho \leqq r,$$

et nous allons donc envisager le problème qui consiste à caractériser cette régularité d'une façon assez instructive.

En prenant comme point de départ la définition des différences indiquée ci-dessus, M. *K. Knopp* vient d'introduire[1]) une notion nouvelle concernant des suites convergentes (ε_ν), *celle de la monotonie d'ordre r (r>0);* il entend par là que toutes les différences $\Delta^r \varepsilon_\nu$ d'ordre r ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) ont le même signe. Cette notion se présente comme une extension de la notion de la monotonie ordinaire, car il se trouve, comme l'a bien démontré M. *Knopp* lui-même, que la monotonie d'ordre r entraîne celle d'ordre ϱ, ϱ étant un nombre quelconque entre zéro et r, tandis que l'inverse n'aura pas lieu. Par conséquent, une suite (ε_ν), monotone d'un ordre r plus grand que l'unité, le sera de même dans le sens ordinaire (d'ordre 1), et d'autre part il existe des suites qui, sans être monotones d'ordre 1, le seront d'un ordre r plus petit que l'unité.

Nous aborderons le problème en examinant un peu quels sont

---

[1]) Mathematische Zeitschrift, Bd. 22 (1925): Mehrfach monotone Zahlenfolgen, pag. 75—85.

Digitized by Google

les rapports éventuels entre les deux espèces de régularité, déterminées par l'un et l'autre des deux termes: *régulier* et *monotone*. Il ressort de la note susindiquée de M. *Knopp qu'une suite convergente* (ε_ν) *sera nécessairement régulière d'ordre* $r(r>0)$ *lorsqu'elle est monotone d'ordre* $r+1$. En d'autres termes, la suite (ε_ν) est forcément régulière d'ordre r, si ses oscillations ne sont pas perceptibles dans les signes des différences $\Delta^{r+1}\varepsilon_\nu$. Mais cette condition est loin d'être nécessaire. En effet, j'ai démontré dans ma Thèse *qu'il suffit de supposer la convergence absolue de la série*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^{(r)} \Delta^{r+1} \varepsilon_\nu, \quad (3)$$

[1])

ce qui fait voir que les signes des différences $\Delta^{r+1}\varepsilon_\nu$ n'ont pas d'importance du tout, l'essentiel étant qu'elles soient assez petites en valeur absolue. Et comme l'on peut facilement se rendre compte — à l'aide d'exemples choisis à propos — que les signes des différences d'un ordre quelconque plus petit que $r+1$ n'ont pas d'importance non plus, il en résulte que les deux espèces de régularité en question sont d'un caractère tout à fait différent. Par conséquent, ce n'est pas dans la monotonie qu'il faut chercher la condition nécessaire et suffisante pour que la suite convergente (ε_ν) soit régulière d'ordre r; il faut plutôt se tourner vers la condition (3).

En effet, il se trouve que la résolution de notre problème est donnée par le théorème que voici:

Théorème 1. Pour que la suite convergente (ε_ν) *soit régulière d'ordre* $r(r>0)$, *il faut et il suffit que la série*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^{(r)} \Delta^{r+1} \varepsilon_\nu$$

soit convergente.

La démonstration de ce théorème, que j'omets ici, s'appuie sur quelques résultats indiqués dans ma Thèse, mais se base surtout sur le théorème auxiliaire suivant:

Théorème 2. Supposons $a_\nu = o(1)$; *alors:*

1) *la convergence de la série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^{(\varrho-1)} a_\nu$ *vers la somme* U *et*

[1]) Si nous nous restreignons à considérer les différences ordinaires, ce résultat est une conséquence immédiate d'un lemme énoncé par M. *Bromwich* dans un mémoire de 1908 (Mathematische Annalen, Bd. 65, pag. 361).

Digitized by Google

avec $\nu \cdot A_\nu^{(\varrho-1)} a_\nu$ *tendant vers zéro pour* $\nu \to \infty\,(\varrho > 0)$
aura lieu en même temps que

2) *la convergence de la série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^{(\varrho)} \Delta a_\nu$ *vers la somme* U.

Ce théorème ne constitue qu'un cas très spécial d'un autre théorème que j'énoncerai à une prochaine occasion, et qui appartient à une classe, dont l'importance vient d'être mise en évidence par M. M. *G.-H. Hardy* et *I.-E. Littlewood*[1]).

Outre les conditions déjà indiquées pour la régularité d'ordre r d'une suite convergente (ε_ν), il y en a d'autres qui sont peut-être susceptibles d'attirer un peu l'attention. En effet, il est assez facile de démontrer *qu'une suite convergente* (ε_ν) *est régulière d'ordre* r, *si* $\Delta^r \varepsilon_\nu = o(\nu^{-r})$, *et qu'elle est régulière «jusqu'à l'ordre* r», *si* $\Delta^r \varepsilon_\nu = O(\nu^{-r})$, *ce qui veut dire que, dans cette supposition,* $\Delta^\varrho \varepsilon_\nu$ *sera* $o(\nu^{-\varrho})$ *pour* $0 < \varrho < r$.

3. Nous terminerons par une application aux séries convergentes. C'est un fait élémentaire dans la théorie des séries que la monotonie ordinaire des termes de la série convergente Σa_ν entraîne la relation $a_\nu = o(\nu^{-1})$. Dans le mémoire auquel nous avons fait allusion à plusieurs reprises M. *Knopp* en a donné l'extension que voici: *Si la serie* Σa_ν, *à termes positifs, converge, et si la suite* (a_ν) *de ses termes est monotone d'ordre* $r\,(r > 0)$, *on aura*

$$\nu^\varrho \Delta^{\varrho-1} a_\nu \to 0 \text{ pour } 0 < \varrho \leqq r. \tag{4}$$

Or, comme la relation (4) exprime une espèce de régularité dans le sens adopté plus haut, il suit de notre exposé que la monotonie des termes (a_ν), bien que suffisante, n'est nullement nécessaire pour que (4) ait lieu. En effet, on peut compléter l'énoncé de M. *Knopp* par le théorème suivant:

Théorème 3. Pour que la série Σa_ν *soit convergente avec* $\nu^\varrho \Delta^{\varrho-1} a_\nu\,(0 < \varrho \leqq r)$ *tendant vers zéro (ou, ce qui en réalité revient au même, avec* $\nu^r \Delta^{r-1} a_\nu$ *tendant vers zéro), il faut et il suffit que* $a_\nu = o\,(1)$ *et que la série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^{(r)} \Delta^r a_\nu$ *soit convergente.*

---

[1]) Mathematische Zeitschrift, Bd. 19 (1924): Solution of the Cesàro summability problem for power-series and Fourier series, pag. 67—96. Voir Theorem A, pag. 69.

Digitized by Google

En particulier, si nous faisons $r = 1$, nous en déduisons que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une série Σa_ν soit convergente avec $\nu \cdot a_\nu \to 0$, se composent de la relation évidente $a_\nu = o(1)$ et de la convergence de la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + 1) \Delta a_\nu$. Ce résultat très spécial se trouve d'ailleurs renfermé dans le théorème cité plus haut de M. M. *Hardy* et *Littlewood*.

Digitized by Google

Digitized by Google

POTENTIALPROBLEME IN DER HYDRODYNAMIK

VON

NILS ZEILON

1. Als »hydrodynamisches Problem« wurde früher und wird zuweilen immer noch die Aufgabe bezeichnet, eine harmonische Funktion durch die vorgeschriebenen Oberflächenwerte der Normalableitung zu bestimmen. Die Lösung des Problems führt auf die bekannte paradoxe Folgerung der widerstandslosen stationären Bewegung. Die klassische potentialtheoretische Fragestellung hat mit derjenigen realistischen Hydrodynamik, die als ihr erstes Ziel die Erklärung und Berechnung des Widerstandes aufstellt, nichts gemeinsam.

Der grundlegende Versuch, durch eigentlich mathematische Hilfsmittel, aus den Bewegungsgleichungen heraus, die hydrodynamische Theorie der Wirklichkeit näher zu bringen, rührt von *Oseen*[1]) her. Der Versuch konnte aussichtslos erscheinen. Denn wenn man auch, was ja durchaus nicht selbstverständlich berechtigt ist, die *Navier- Stokes*schen Differentialgleichungen als den endgültigen Ausdruck für die Bewegungsformen einer Flüssigkeit annimmt, so war es dennoch zu erwarten, dass die notwendige Beschränkung auf ein lineares Problem keine weitgehende Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen zulassen würde. Um so mehr bemerkenswert ist es denn, dass die Oseensche Theorie imstande ist, ein in wesentlichen Zügen richtiges Bild von den hydrodynamischen Erscheinungen zu entwerfen.

Die neue Hydrodynamik sieht das genannte Paradoxon als die Folge einer fehlerhaften Behandlung der Reibungsglieder der Bewegungsgleichungen an. Der Übergang zu verschwindender Reibung muss ausgeführt werden, nicht durch direktes Einsetzen

[1]) Beiträge zur Hydrodynamik I—III. Annalen d. Phys. Bd. 46, 1915.

Digitized by Google

von $\mu = 0$ in die Differentialgleichungen, sondern durch eine asymptotische Analyse der durch die gehörigen Grenzbedingungen fixierten Lösungen (etwa in der Weise wie die geometrische Optik als ein Grenzfall aus der Wellentheorie hergeleitet wird). Wie in der klassischen Hydrodynamik wird man auch hier auf Potentialprobleme geführt, die aber ganz anders formuliert und viel komplizierter sind.

2. Zunächst lässt sich, mit Beschränkung, der Einfachheit wegen, auf zweidimensionale Bewegung, der Grundgedanke der Oseenschen Theorie folgendermassen in modifizierter und verallgemeinerter Fassung aussprechen. Ich gehe aus von den bekannten Gleichungen der stationären Bewegung:

I.
$$-\varrho v\bar{w} = -\frac{\partial q}{\partial x} + \mu \Delta u;$$
$$+\varrho u\bar{w} = -\frac{\partial q}{\partial y} + \mu \Delta v;$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$
$$\bar{w} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y};\ q = p + \frac{\varrho}{2}(u^2 + v^2),$$

und nehme an, dass durch

$$u_0 = -\frac{\partial \psi}{\partial y},\ v_0 = +\frac{\partial \psi}{\partial x};\ \Delta\psi = 0$$

eine bekannte, »eingeprägte«, wirbelfreie Strömung gegeben ist. *Indem wir den Einfluss des eingesenkten Körpers als eine auf diese Potentialströmung ausgeübte Störung betrachten*, schreiben wir für die totalen Geschwindigkeitskomponenten:

$$u = u_0 + u',\ v = v_0 + v';\ \bar{w} = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}.$$

Im Falle stationärer Translation ergibt z. B. die einfachste natürliche Annahme

$$\psi = U_0 y;\ u_0 = -U_0,\ v_0 = 0$$

den Ansatz Oseens. Wie in diesem speciellen Falle reduzieren wir zu einem linearen Problem durch die grundsätzliche Hypothese, *dass in den Produkten*

Digitized by Google

$$u\overline{w},\ v\overline{w},\ u\frac{\partial\overline{w}}{\partial x},\ v\frac{\partial\overline{w}}{\partial y},$$

die quadratischen Störungsglieder

$$u'\overline{w},\ v'\overline{w},\ \text{etc.}$$

gegenüber den »halbquadratischen«

$$u_0\overline{w},\ v_0\overline{w},\ \text{etc.}$$

vernachlässigt werden dürfen.

Durch Elimination von q erhalten wir, mit Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung:

1) $$\varrho\left(u_0\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}+v_0\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}\right)=\mu\Delta\overline{w}.$$

Wenn $\mu=0$ gesetzt wird, kommt sogleich

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial x}, & \frac{\partial\psi}{\partial y}\\ \frac{\partial\overline{w}}{\partial x}, & \frac{\partial\overline{w}}{\partial y}\end{vmatrix}=0,\ \text{oder}\ \overline{w}=f(\psi).$$

Wir können somit schliessen, dass, von möglichen Diskontinuitäten ($\Delta\overline{w}\to\infty$) abgesehen, die Lösung des linearisierten Gleichungssystems ausser einer laminaren Strömung auch *eine turbulente Strömung enthalten kann, derart dass der Wirbel auf gewissen Stromlinien der eingeprägten Strömung mit konstanter Intensität verteilt ist.*

Dieses Resultat wird durch die asymptotische Diskussion der Gleichung 1) mit den zugehörigen Grenzbedingungen bestätigt.

Setzen wir, um die Kontinuitätsgleichung zu befriedigen:

$$u'=-\frac{\partial\Theta}{\partial y},\ v'=+\frac{\partial\Theta}{\partial x},$$

so folgt zunächst aus 1):

$$\varrho\left(u_0\frac{\partial\Delta\Theta}{\partial x}+v_0\frac{\partial\Delta\Theta}{\partial y}\right)=\mu\Delta^2\Theta,$$

wo

$$\Delta\Theta=\Delta_{x,y}\Theta=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Theta=\overline{w}.$$

Es sei jetzt

Digitized by Google

ψ = Imaginärteil von $(\varphi + i\psi)$.

Auf die Koordinaten φ, ψ transformierend erhalten wir allgemein

$$u_0 \frac{\partial f}{\partial x} + v_0 \frac{\partial f}{\partial y} = -(v_0^2 + v_0^2) \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\Delta_{x,y} f = (u_0^2 + v_0^2) \Delta_{\varphi,\psi} f,$$

so dass wir schliesslich die Gleichung 1) so schreiben können[1])

$$(2) \qquad \left(\varrho \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mu \Delta_{\varphi,\psi}\right) \Delta_{x,y} \Theta = \left(\varrho \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mu \Delta_{\varphi,\psi}\right) \overline{w} = 0.$$

3. Die obige Gleichung für $\overline{w}$ ist, von der Koordinatenwahl abgesehen, mit derjenigen Gleichung identisch, deren asymptotisches Verhalten in Oseens Theorie Wirbelbildung und Kielwasser bestimmt. In der Grenze für $\mu = 0$ kommt betreffs der Randbedingungen prinzipiell dasselbe Resultat heraus. Die Randkurve wird in zwei Bereiche geteilt, einer »hydrodynamischen Vorder«- bez. »Rückseite« entsprechend. An der Vorderseite (S_a) gleitet die Flüssigkeit einfach in reiner Potentialströmung vorbei, während an der Rückseite (S_p) die Wirbelverteilung so zu bestimmen ist, dass, wenn möglich, die Flüssigkeit daselbst am Körper haftet.

Die Herleitung dieses Resultates ist aus den Eigenschaften der Grundlösung von 2) leicht verständlich. Wenn (φ_0, ψ_0) einen willkürlichen Punkt der Randkurve bezeichnet, so wird die gesuchte Lösung $\overline{w}$ mit Hülfe der Funktion

$$F(\varphi, \psi, \varphi_0, \psi_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\alpha(\varphi-\varphi_0)+\beta(\psi-\psi_0))}}{\mu(\alpha^2+\beta^2) - i\varrho\alpha} \, d\alpha \, d\beta$$

$$= e^{-\frac{\varrho}{2\mu}(\varphi-\varphi_0)} K_0\left(\varrho \frac{R}{2\mu}\right); \quad R = \sqrt{(\varphi-\varphi_0)^2 + (\psi-\psi_0)^2},$$

wo K_0 eine Hankelsche Funktion von imaginärem Argument bedeutet, in gewöhnlicher Weise durch die Greensche Formel dargestellt. Für $\mu \to 0$ findet man, dass F überall gegen null konvergiert ausser auf der durch

$$\psi = \psi_0, \quad \varphi - \varphi_0 < 0$$

[1]) Diese Transformation findet sich schon bei *Boussinesq*, Journal de Liouville (6) 1, S. 285, 1905.

Digitized by Google

definierten singulären Kurve, wo F derart unendlich wird, dass das Greensche Randintegral einen entsprechenden endlichen Betrag liefert.

Durch jeden Punkt φ_0, ψ_0 hat man also die betreffende Stromlinie $\psi = \psi_0$ zu ziehen; die Gesamtheit aller Punkte der Flüssigkeit, für welche $\varphi < \varphi_0$ ist, bestimmt die Form und Ausdehnung des der hydrodynamischen Rückseite angeschlossenen Wirbelbereiches.

Die Art des neuen potentialtheoretischen Problems ist damit auch festgelegt. Nach dem Gesetz

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Delta_{x,y} \Theta}{\partial \varphi} = 0; \quad \Delta_{x,y} \Theta = f(\psi),$$

soll auf den genannten singulären Kurven eine Wirbelbelegung mit zugehöriger Strömung, d. h. die unbekannte Funktion $\overline{w}$ und die damit verbundene Strömungsfunktion Θ, so bestimmt werden, dass

A) $$(u_0 + u') \cos(n, x) + (v_0 + v') \cos(n, y) = 0 \quad \text{an } S_a;$$
$$u_0 + u' = v_0 + v' = 0 \quad \text{an } S_p;$$
$$u' = v' = 0 \quad \text{im Unendlichen.}$$

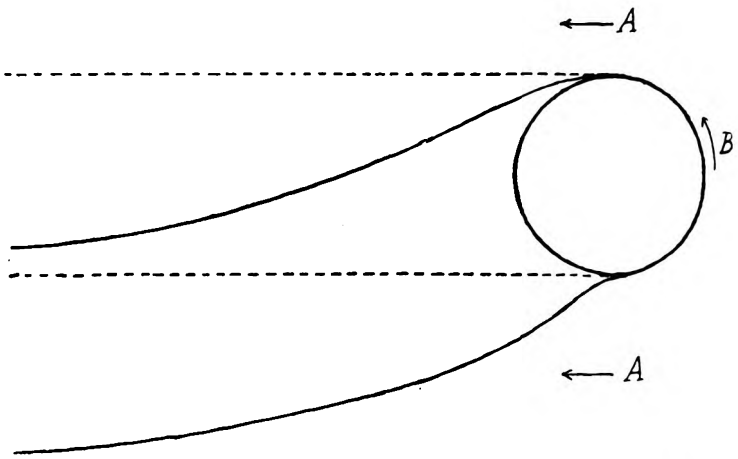
4. Es ist klar, dass die Wahl der eingeprägten Strömung ψ gewissermassen willkürlich ist und selbstverständlich den natürlichen Voraussetzungen des bezüglichen Problems gemäss getroffen werden muss. Ich erwähne als Beispiel den Fall des in einem gleichmässigen Flüssigkeitsstrome rotierenden Zylinders (»Magnuseffekt«), wo man als natürlichen Ansatz für die Primärströmung am einfachsten

$$\varphi + i\psi = A(x + iy) + iB \log(x + iy)$$

annimmt. Die Figur unten (für $\frac{A}{B} > 1$) zeigt, wie der Wirbelbereich, der in der Oseenschen Theorie des stillstehenden Zylinders der Strömungsrichtung parallel verläuft und geradlinig begrenzt ist, jetzt durch die Rotation deformiert und abgelenkt erscheint.

5. Es ist mir hier nicht möglich, auf die schwierige Frage von der Existenz und Berechnung einer den obigen Forderungen genügenden Funktion Θ näher einzugehen. So viel kann gesagt werden, dass die Lösung von einer singulären Integralgleichung

Digitized by Google



abhängt und dass sie im allgemeinen, einem tangentialen Geschwindigkeitssprung entsprechend, an der Grenze des Wirbelgebiets diskontinuierlich sein wird.

In *einem* wichtigen Fall lässt sich jene Integralgleichung auf eine bekannte Aufgabe zurückführen und explizite lösen. Mit $\psi = U_0 y$ folgt unmittelbar

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial x} = 0, \quad \Delta \Theta = f(y),$$

und die letzte Gleichung wird sofort durch eine willkürliche, von x unabhängige Strömung parallel der x-Achse befriedigt. Es genügt somit, ein Potential Φ so zu bestimmen, dass

$$\text{an } S_a: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -U_0 \cos(n, x);$$

$$\text{an } S_p: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0,$$

und das Haften an der Rückseite wird sofort dadurch erzielt, dass man der Potentialbewegung eine durch die Werte von $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ an S_p bestimmte Parallelströmung überlagert, welche letztere innerhalb eines hinter der Randkurve rückwärts gezogenen, der x-Achse parallelen Wirbelstreifens (Ω) verläuft. Das Geschwindigkeitsfeld wird gegeben durch

$$u' = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v' = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad \text{ausserhalb } \Omega;$$

Digitized by Google

$$u' = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_{s_p}, \quad v' = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{innerhalb } \Omega.$$

Durch die obigen Bedingungen ist Ψ als ein »gemischtes« Potential festgelegt. Setzen wir

$$u - iv = W(x + iy) = U + iV,$$

so gehören die Randbedingungen unter das allgemeine Schema

$$a(s)\, U(s) - b(s)\, V(s) = c(s),$$

oder nach einer konformen Abbildung auf den Kreis:

$$3) \qquad a(\theta) U(\theta) - \frac{b(\theta)}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} U(\theta') \cot \frac{1}{2}(\theta' - \theta)\, d\theta' = c(\theta),$$

wobei wir festlegen können, dass die Punkte $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ den »kritischen« Punkten, d. h. den Übergangspunkten zwischen Vorder- und Rückseite entsprechen.

6. Nach einem von *Hilbert* angegebenen Vorgang[1]) lässt sich die Auflösung der Gleichung 3) auf eine gewöhnliche Randwertaufgabe zurückführen. Nehmen wir das Poissonsche Integral

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \log \frac{a(\theta') + i b(\theta')}{a(\theta') - i b(\theta')} \left(\frac{1}{z' - z} - \frac{1}{2z'}\right) dz',$$

so finden wir sofort, dass

$$i F\left(i \frac{z - i}{z + i}\right) e^{w(z)},$$

wo F eine willkürliche »reelle« Funktion des auf dem Kreise reellen Arguments $i \frac{z - i}{z + i}$ ist, eine Lösung (»Nullösung«) der Gleichung 3) ohne rechtes Glied darstellt. Mit Hülfe dieser homogenen Lösung wird nachher unmittelbar eine Lösung der nicht homogenen Aufgabe konstruiert.

Beim hydrodynamischen Problem besitzt man aber offenbar immer die Partikularlösung

$$W = const. = U_0,$$

---

[1]) Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, S. 82. Leipzig 1912.

Digitized by Google

und es genügt, die homogene Lösung so zu bestimmen, dass die jetzt übrig gebliebene Bedingung (im ∞) befriedigt wird. Wie ich anderswo näher ausgeführt habe, ist die Bestimmung der Nulllösung eindeutig möglich: insbesondere wird die Funktion $F\left(i\frac{z-i}{z+i}\right)$ durch Stetigkeitsbedingungen in den kritischen Punkten $z = \pm i$ festgelegt[1]).

7. Was schliesslich den praktischen physikalischen Wert der hier skizzierten Theorie betrifft, verweise ich auf die zitierte Abhandlung, wo der Vergleich zwischen Theorie und Erfahrung in Einzelheiten ausgeführt ist. Durch den Oseenschen Grenzübergang wird mit der Strömung auch der Druck eindeutig bestimmt, und somit besitzt man alles Nötige um Widerstand und Auftrieb in allen solchen Fällen zu berechnen, wo die Randkurve sich in einen Kreis konform umbilden lässt. Speziell wurde die Berechnung für den zirkulären Zylinder und für die in verschiedenen Neigungswinkeln orientierte Platte durchgeführt[2]). Dabei ergaben sich Widerstandswerte, die zwar von der richtigen Grössenordnung sind, die aber, mit den experimentellen Werten verglichen, durchweg (um 60—70 %) zu gross ausfallen.

Einen schönen Beleg dafür, dass die Theorie in manchen Beziehungen der Wirklichkeit sehr nahe kommt, gibt die Berechnung der Laminarströmung an der Vorderseite des Körpers. Die theoretische Druckverteilung stimmt mit der beobachteten sowohl betreffs Relativ- wie auch Absolutwerte sehr gut überein. Der Schluss scheint berechtigt, dass die übertriebenen Widerstandswerte hauptsächlich mit einer unrichtigen Bestimmung der Wirbelbewegung im Kielwasser zusammenhängen, während die Laminarströmung ausserhalb Ω die Tatsachen nahezu richtig darstellt. Kein Wunder aber, dass dies der Fall ist; es ist klar, dass die grundlegende Vereinfachung der Bewegungsgleichungen eben da gefährlich sein muss, wo starke Wirbelintensität auftritt. Das findet aber besonders an der Grenze von Ω statt; und so erklärt sich in ungezwungener Weise der übertriebene Unterdruck inner-

---

[1]) On Potential problems in the theory of fluid resistance. Kgl. Sv. Vetenskapsakad. Handlingar. Bd. 1, n:o 1. Stockholm 1924.

[2]) Beim Zylinder wurde aus Versehen die Existenz der einfachen Partikularlösung $W = U_0$ nicht beobachtet. Die Lösung ist zwar richtig berechnet aber in unnötig komplizierter Form gegeben.

Digitized by Google

halb des Wirbelstreifens als die natürliche Folge einer dort mehr als anderswo ungenügenden Approximation.

Wie dem auch sei, es würde frühzeitig sein, die praktische Unvollkommenheit unserer Theorie zu rügen. Im Gegenteil wird man zugeben, dass mit den Schwierigkeiten des Problems verglichen sie viel mehr leistet, als von vornherein zu erwarten war. Denn mathematisch bedeutet sie eigentlich nur eine erste, verhältnissmässig grobe Annäherung. *Ein* wesentlicher Fortschritt, der an sich genügen würde, um den Wert und die Richtigkeit des grundlegenden Ansatzes zu beweisen, ist schon damit erzielt: jener paradoxe Gegensatz zwichen Theorie und Erfahrung besteht nicht mehr. Die Theorie, durch die Bewegungsgleichungen formuliert, ist mit der experimentellen Wirklichkeit wenigstens in Kontakt gebracht. Die weitere Zusammenschmelzung ist der Zukunft vorbehalten. Die Aufgabe wird schwer sein, hoffnungslos ist sie aber nicht.

Digitized by Google

Digitized by Google

ON THE GEOMETRIC RELATION BETWEEN THE TANGENTS IN MULTIPLE POINTS OF CERTAIN ALGEBRAIC CURVES

BY

OLAF M. THALBERG

For a quartic curve with three nodes the six nodal tangents touch the same conic.

This well known theorem shows that the sixth tangent is related to the five others in a very simple geometric way according to the fact, that a quartic curve is determined by three given nodes and five nodal tangents (14 independent conditions).

It may be expected that also for higher algebraic curves with several multiple points there must be some geometric relation between the tangents in these points, when the multiple points and their tangents together form an excess of independent conditions.[1])

So far as we know, however, no theorem analogous to that above has yet appeared in the literature, and we shall therefore show how we by means of an involutory quadratic Cremona-transformation have obtained some analogous theorems.

Our first theorem is the following one:

Given a sextic curve with seven nodes, three nodes being the three diagonal points of the quadrangle formed by the four others, then the eight nodal tangents in these four nodes touch the same conic.

To prove this we consider the quadratic involution, in which the three mentioned diagonal points (A_1, A_2, A_3 in the figure) form the three fundamental points (F-points) and the four other nodes of the sextic (K_1, K_2, K_3, K_4) form the four fixed points (coincident points).

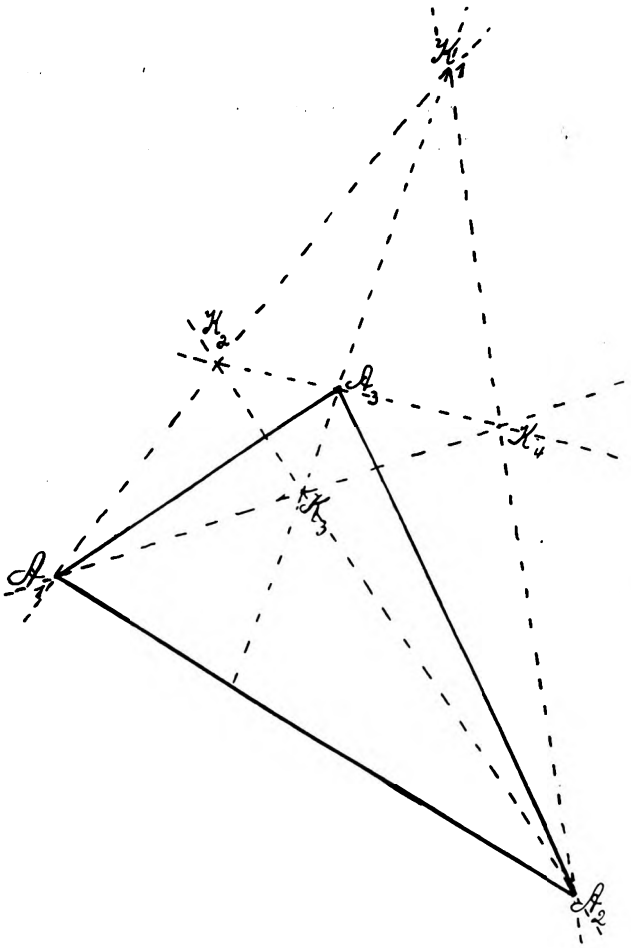
---

[1]) See *Salmon-Fiedler:* »Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven«, Teubner 1882, p. 42.

Digitized by Google

This involution may be geometrically defined as follows:

P **and** P' **are conjugate points, if** A_1 $(P, P'; K_2, K_3)$ and A_2 $(P, P'; K_3, K_4)$ **both form harmonic pencils.** Then also the **pencil** A_3 $(P, P'; K_4, K_1)$ **is harmonic.**



Of the properties of this well known involution we shall here write down the following ones:

1) To the ∞^1 **points of the straight line** $A_j A_k$ **correspond in harmonic manner the** ∞^1 **directions at** A_i. **The three points** A_i **are therefore called** F**-points of first order.**

2) To an n**-ic — not passing through any of the points** A_i **— correspond a** $2n$**-ic, having** n**-ple points at each of the points** A_i.

Digitized by Google

3) If a curve has an r-ple point at A_i, the order of the conjugate curve is lowered by r, and the multiplicities of this curve at A_j and A_k are also lowered by r.

4) Each of the six straight lines, joining two points K_i, is a self-conjugate curve, the ∞^1 pairs of conjugate points on this line forming an harmonic range with the two points K_i as the double points.

5) The four points K_i are fixed points, the ∞^1 directions at which being self-conjugate i. e. to a curve through K_i correspond a curve, touching the first one at K_i.

6) Given a curve of order n, not passing through any of the points K_i or A_i.

The straight line, joining any point of the given curve to the conjugate point, envelops a curve of class $3n$. The two self-conjugate straight lines through A_i must both be n-ple tangents to the envelope and the other n tangents from A_i to the envelope must be the n lines passing through the n intersections of the line $A_j A_k$ with the given curve.

7) If the given curve has an r-ple point at a point K_i or at a point A_i, the effect of this is to lower the class of the envelope by r. In the first case (K_i is an r-ple point) one of the two self-conjugate lines through A_i becomes an $(n\text{-}r)$-ple tangent only. In the second case (A_j is an r-ple point) the n mentioned ordinary tangents from A_i are reduced to $n\text{-}r$.

Consider now a cubic through the seven points A_i and K_i. Any of these ∞^2 cubics must be a *self-conjugate curve.* In the opposite case the cubic would intersect the conjugate cubic in 11 points (2 points at each of the four points K_i and in the three points A_i). Hence the two cubics must coincide as a consequence of the Theorem of *Bezout.* — The two other intersections of two cubics through the seven points A_i and K_i must accordingly be conjugate points, and the involution may thus also be defined by the mentioned seven points and their net of cubics[1]).

Consider again one of the mentioned cubics. The straight line joining any point of the cubic to the conjugate point envelops a curve of class 3 ; 3 - 7 i. e. of second class. Since the cubic, however, is self-conjugate, each tangent to the envelope must be taken twice i. e. the envelope must be a curve of first class (a point)

[1]) Our involution is a special case of the *Geiser* involution, which is defined by seven points in general. *F. Geiser,* Journal f. Math. LXVII, 1867.

Digitized by Google

twice counted. In other words: All straight lines joining two conjugate points on the cubic must pass through the same point. This result is also a consequence of the *Brill-Noether* (*Sylvester*) theorem of residuation, and from this theorem it also follows, that the mentioned point is lying on the cubic itself. [The pairs of conjugate points on the cubic must be coresidual pointgroups, as the seven points A_i and K_i form a common residual].

Now consider our given sextic. The conjugate curve must also be a sextic with nodes at the seven points A_i and K_i, and the two sextics must at the four points K_i have the same nodal tangents (the properties [2]), [3]) and [5])). Accordingly the points A_i and K_i contain all the 36 intersections of the two sextics, these two curves defining a pencil of sextics with 6 base-points at each point K_i and 4 base-points at each point A_i. In our involution the ∞^1 sextics of the pencil will correspond to one another in an involutorial and birational (harmonic) manner, and thus the pencil contains two self-conjugate sextics. One of these sextics consists of the six self-conjugate straight lines, and hence the other one (being degenerate or non-degenerate) must have *the same nodal tangents at the four points* K_i *as our given sextic.*

The straight line ,through two conjugate points on this self- conjugate sextic envelops a curve of second class $\left(\frac{6\cdot 3-7\cdot 2}{2}\right)$ twice counted. To the tangents of this envelope — or this conic — must belong the eight nodal tangents of the self-conjugate sextic (i. e. of *our given sextic)* at the four points K_i (the property [5])), and thus *our theorem is proved.*

To the tangents of the conic, however, must also belong the harmonic conjugate to each nodal tangent of the self-conjugate sextic at A_i with respect to the two self-conjugate lines through A_i. Or the two tangents from A_i to the conic must pass through the two other intersections of the *self-conjugate* sextic with the line $A_k A_j$ (see [1]) and [6])).

Let us now proceed to *a given 9-ic* with triple points at the seven points A_i and K_i. To this curve must in our involution correspond an other 9-ic — also with triple points at A_i and K_i — and with the same tangents at the four points K_i. Consequently the two 9-ics meet again in six points, forming three pairs of conjugate points. The two curves therefore define a pencil of 9-ics, corresponding to one another in harmonic way.

Digitized by Google

Hence this pencil contains two self-conjugate members, and one of these two 9-ics must have *the same tangents at* K_i *as the given curve,* the other one consisting of the six self-conjugate straight lines and a self-conjugate cubic. The first self-conjugate 9-ic defines in the mentioned way as envelope a curve of third class $\left(\frac{9\cdot 3 - 7\cdot 3}{2}\right)$, and thus we have obtained the following theorem:

Given a 9-ic with seven triple points, forming the four corners and the three diagonal points of a quadrangle, then the twelve tangents in the four corners touch the same curve of third class.

In similar way we derive the following theorem:

Given a 12-ic with seven quadruple points, forming the four corners and the three diagonal points of a quadrangle, then the sixteen tangents in the four corners touch the same curve of fourth class.

Digitized by Google

Digitized by Google

FORSØG PAA UDVIDELSE AF BEGREBET »ANALYTISKE FUNKTIONER«

AF

ERIK SCHOU

Ser man bort fra de komplexe Tals Symbolik, vil en analytisk Funktion være at opfatte som et Funktionspar (φ, ψ), idet de to reelle Funktioner $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ tilfredsstiller Differentialligningerne

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

og disse Ligninger medfører atter, at φ og ψ er Integraler til Laplace's Ligning

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Vil man ud fra denne Betragtningsmaade generalisere Begrebet: analytisk Funktion, er det meget nærliggende at betragte et Funktionspar (φ, ψ), som tilfredsstiller Ligninger af Formen

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = p \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -p \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{1}$$

hvor p er Funktion af de reelle Variable x, y.

Den simplest mulige Antagelse, man kan gøre om p, er, at den er regulær tillige med alle sine Afledede samt forskellig fra Nul overalt paa den reelle (x, y)-Kugle.

I det følgende skal jeg meddele nogle Resultater vedrørende denne Generalisation, idet det er mit Haab, at andre kunde faa Lyst til at beskæftige sig med disse Undersøgelser.

Allerede i 1891 har Picard undersøgt Ligninger af Formen (1), og han har paavist Analogier med de analytiske Funktioner. Mine Undersøgelser er imidlertid uafhængige af Picard's.

Digitized by Google

Af (1) følger

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{p}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{p}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)=0 \tag{3}$$

φ og ψ tilfredsstiller altsaa to forskellige Differentialligninger af elliptisk Type og af samme Form.

I.

Angaaende Bestemmelsen af et i Omegnen af et vilkaarligt Punkt — f. Ex. (0,0) — regulært Integral til en Ligning af denne Form kan man bevise en Sætning, som giver en interessant Analogi med Laplaces Ligning. Herved benyttes følgende almindelige Sætning om en i Omegnen af (0,0) regulær Funktion.

Lad $F(x, y)$ være regulær i Omegnen af (0,0). $F(x, y)$ kan da udvikles i Række paa følgende Maade:

$$F(x,y)=F_0(x,y)+(x^2+y^2)F_1(x,y)+(x^2+y^2)^2F_2(x,y)+\ldots\ldots \\ +(x^2+y^2)^m F_m(x,y)+\ldots\ldots,$$

idet F_0, F_1, F_2,.... er harmoniske Funktioner, ɔ: tilfredsstiller Laplace's Ligning, der ligeledes er regulære i Omegnen af (0,0). Rækkeudviklingen er konvergent i et vist Omraade omkring (0,0), og den vil være éntydigt bestemt.

Om Integraler til en Ligning af den betragtede Form, f. Ex. (2), har man da følgende Sætninger:

1. *Lad $F_0(x, y)$ være en vilkaarlig harmonisk Funktion, som er regulær i Omegnen af (0,0). Der existerer da en Række af éntydigt bestemte, harmoniske Funktioner: F_1, F_2,.... saaledes, at Rækken*

$$F(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}(x^2+y^2)^m F_m(x,y)$$

   er absolut og ligeligt konvergent i et vist Omraade omkring (0,0), medens dens Sum $F(x, y)$ tilfredsstiller (2).
2. *Hvis alle de Afledede af F, op til en vis Orden, bliver Nul i Punktet (0,0), vil F_0 indeholde Leddene af lavest Orden.*
3. *Er $F_0 \equiv 0$ vil ogsaa $F \equiv 0$.*

Digitized by Google

II.

Vi betragter Differentialligningen (2). Man ved[1]), at naar (x_0, y_0), (ξ_0, η_0) betegner to forskellige Punkter, existerer der et Integral til (2): $G(xy, \xi\eta | x_0 y_0, \xi_0 \eta_0)$, som har følgende Egenskaber:

1. $G(xy, \xi\eta | x_0 y_0, \xi_0 \eta_0) = G(\xi\eta, xy | \xi_0 \eta_0, x_0 y_0) = G(x_0 y_0, \xi_0 \eta_0 | xy, \xi\eta)$.
2. $G(x_0 y_0, \xi\eta | x_0 y_0, \xi_0 \eta_0) = G(xy, \xi_0 \eta_0 | x_0 y_0, \xi_0 \eta_0) = 0$.
3. Giver vi $(\xi\eta)$ en fast Værdi, vil G være regulær for alle (xy) med Undtagelse af $(xy) = (\xi\eta)$ og $(xy) = (\xi_0 \eta_0)$, og i Omegnen af disse Punkter haves henholdsvis

$$G = -\frac{1}{4\pi\sqrt{p(xy)}\sqrt{p(\xi\eta)}} A(xy, \xi\eta) \log((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2) + B(xy, \xi\eta)$$

$$G = +\frac{1}{4\pi\sqrt{p(xy)}\sqrt{p(\xi\eta)}} A'(xy, \xi\eta) \log((x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2) + B'(xy, \xi\eta),$$

hvor A og B er regulære i Omegnen af $(xy) = (\xi\eta)$, medens A' og B' er regulære i Omegnen af $(xy) = (\xi_0 \eta_0)$.

Som Funktion af $(\xi\eta)$ forholder G sig paa ganske analog Maade, idet den for en fast Værdi af (xy) bliver logarithmisk uendelig i $(\xi\eta) = (xy)$ og $(\xi\eta) = (x_0 y_0)$.

G er aabenbart analog med den harmoniske Funktion

$$P(xy, \xi\eta | x_0 y_0, \xi_0 \eta_0) = -\frac{1}{4\pi} \log \frac{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)((x_0-\xi_0)^2 + (y_0-\eta_0)^2)}{((x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2)((x_0-\xi)^2 + (y_0-\eta)^2)}$$

der atter er lig med den reelle Del af den analytiske Funktion

$$R(z, \zeta | z_0, \zeta_0) = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{(z-\zeta)(z_0-\zeta_0)}{(z-\zeta_0)(z_0-\zeta)}.$$

Til den imaginære Del af denne analytiske Funktion finder man et Analogon ved Funktionen K, som bestemmes ved Ligningerne

[1]) *Hilbert*: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Pag 219 o. f.

Digitized by Google

$$\frac{\partial K}{\partial \eta} = p(\xi\eta)\frac{\partial G}{\partial \xi},\ \frac{\partial K}{\partial \xi} = -p(\xi\eta)\frac{\partial G}{\partial \eta}.$$

Som Funktion af $(\xi\eta)$ vil K tilfredsstille (3), og som Funktion af (xy) tilfredsstiller K Differentialligningen (2). K er flertydig som en arctg, idet den, naar man lader (xy) variere, har $(\xi\eta)$ og $(\xi_0\eta_0)$ til singulære Punkter, medens den, som Funktion af $(\xi\eta)$ er singulær i (xy) og (x_0y_0).

Ved Ombytning af (xy), (x_0y_0) med $(\xi\eta)$, $(\xi_0\eta_0)$ dannes af K en ny Funktion H, som ogsaa kan defineres ved

$$\frac{\partial H}{\partial y} = p(xy)\frac{\partial G}{\partial x},\ \frac{\partial H}{\partial x} = -p(xy)\frac{\partial G}{\partial y}$$

H vil i (xy) tilfredsstille (3) og i $(\xi\eta)$: (2).

Endelig viser det sig, at der existerer en Funktion Γ af (xy) og $(\xi\eta)$, der tilfredsstiller de fire Ligninger

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial y} = p(xy)\frac{\partial K}{\partial x},\ \frac{\partial \Gamma}{\partial x} = -p(xy)\frac{\partial K}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} = p(\xi\eta)\frac{\partial H}{\partial \xi},\ \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} = -p(\xi\eta)\frac{\partial H}{\partial \eta}.$$

Denne Funktion tilfredsstiller (3) baade i (xy) og i $(\xi\eta)$, og den spiller for denne Ligning ganske samme Rolle som G med Hensyn til (2).

Man kan saaledes sige, at der til den reelle og den imaginære Del af den analytiske Funktion R kommer til at svare ikke 2 men 4 Funktioner. Den fulde Analogi med de analytiske Funktioner faas saaledes ikke paa denne Maade.

Vender vi tilbage til Funktionen P, som for Laplace's Ligning svarer til G, og sætter

$$\frac{z - z_0}{z - \zeta_0} = re^{i\theta},\ \frac{\zeta - z_0}{\zeta - \zeta_0} = \varrho e^{i\tau}$$

haves Rækkeudviklingen

$$P = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^n(\cos n\theta\cos n\tau + \sin n\theta\sin n\tau) \qquad (4)$$

Digitized by Google

eller, naar vi sætter

$$A_n(xy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} r^n \cos n\theta, \quad A_n'(xy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} r^n \sin n\theta$$

$$B_n(\xi\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{1}{\varrho^n} \cos n\tau; \quad B_n'(\xi\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{1}{\varrho^n} \sin n\tau,$$

$$P(xy, \xi\eta \mid x_0 y_0, \xi_0 \eta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n(xy) B_n(\xi\eta) + A_n'(xy) B_n'(\xi\eta)).$$

Tillige er

$$A_n(xy) + i A_n'(xy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{z - z_0}{z - \zeta_0}\right)^n$$

$$B_n(\xi\eta) - i B_n'(\xi\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - z_0}\right)^n$$

Funktionerne A_n og A_n' har altsaa den Egenskab, at deres fælles Nulpunkter samler sig i $(x_0 y_0)$, hvor de begge bliver Nul af n^{te} Orden. Funktionerne er endelige overalt med Undtagelse af Punktet $(\xi_0 \eta_0)$, hvor de begge bliver uendelige af n^{te} Orden. Endelig har Funktionaldeterminanten af A_n og A_n' samme Tegn overalt.

Funktionerne B_n og B_n' har ganske samme Egenskaber, naar blot $(x_0 y_0)$ ombyttes med $(\xi_0 \eta_0)$.

Det er ikke vanskeligt at danne de Funktioner, der tilfredsstiller Differentialligningen (2), og som er analoge med disse rationale Funktioner.

Lad os nemlig søge at bestemme fire Funktioner

$$\Phi_1(xy), \ \Phi_1'(xy), \ \Psi_1(\xi\eta), \ \Psi_1'(\xi\eta)$$

saaledes at

$$G_1(xy, \xi\eta \mid x_0 y_0, \xi_0 \eta_0) = G(xy, \xi\eta \mid x_0 y_0, \xi_0 \eta_0) - \Phi_1(xy) \Psi_1(\xi\eta) - \Phi_1'(xy) \Psi_1'(\xi\eta)$$

bliver Nul af anden Orden saavel for $(xy) = (x_0 y_0)$, $(\xi\eta)$ vilkaarlig, som for $(\xi\eta) = (\xi_0 \eta_0)$, (xy) vilkaarlig.

Indføres for Nemheds Skyld $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$, som Variable, finder man

Digitized by Google

$$\Phi_1(xy)\Psi_1(\xi\eta)+\Phi_1'(xy)\Psi_1'(\xi\eta)=\frac{1}{\Delta_1}\begin{vmatrix} 0 & \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_{z=z_0} & \left(\frac{\partial G}{\partial \bar{z}}\right)_{z=z_0} \\ \left(\frac{\partial G}{\partial c}\right)_{c=c_0} & \left(\frac{\partial^2 G}{\partial z\,\partial c}\right)_{\substack{z=z_0\\c=c_0}} & \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z}\,\partial c}\right)_{\substack{z=z_0\\c=c_0}} \\ \left(\frac{\partial G}{\partial \bar{c}}\right)_{c=c_0} & \left(\frac{\partial^2 G}{\partial z\,\partial \bar{c}}\right)_{\substack{z=z_0\\c=c_0}} & \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z}\,\partial \bar{c}}\right)_{\substack{z=z_0\\c=c_0}} \end{vmatrix},$$

idet

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial z\,\partial c}\right)_{\substack{z=z_0\\c=c_0}} & \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z}\,\partial c}\right)_{\substack{z=z_0\\c=c_0}} \\ \left(\frac{\partial^2 G}{\partial z\,\partial \bar{c}}\right)_{\substack{z=z_0\\c=c_0}} & \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z}\,\partial \bar{c}}\right)_{\substack{z=z_0\\c=c_0}} \end{vmatrix},$$

Δ_1 er reel og kan bevises at være forskellig fra Nul.

Endelig findes (Betegnelserne afkortes lidt)

$$G_1=\frac{1}{\Delta_1}\begin{vmatrix} G & \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_0 & \left(\frac{\partial G}{\partial \bar{z}}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial G}{\partial c}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 G}{\partial z\,\partial c}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z}\,\partial c}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial G}{\partial \bar{c}}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 G}{\partial z\,\partial \bar{c}}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z}\,\partial \bar{c}}\right)_0 \end{vmatrix}.$$

Man kan bevise, at Funktionerne Φ_1 og Φ_1' har ganske de samme Egenskaber, som ovenfor blev anført for A_1 og A_1', og ligeledes har Ψ_1 og Ψ_1' de samme Egenskaber som B_1 og B_1'.

Vi kan dernæst gaa videre, idet vi bestemmer fire Funktioner

$$\Phi_2(xy),\ \Phi_2'(xy),\ \Psi_2(\xi\eta),\ \Psi_2'(\xi\eta)$$

saaledes, at

$$G_2(xy,\xi\eta|x_0y_0,\xi_0\eta_0)=G_1(xy,\xi\eta|x_0y_0,\xi_0\eta_0)-\Phi_2(xy)\Psi_2(\xi\eta)-\Phi_2'(xy)\Psi_2'(\xi\eta)$$

bliver Nul af tredje Orden saavel for $(xy)=(x_0y_0)$, $(\xi\eta)$ vilkaarlig, som for $(\xi\eta)=(\xi_0\eta_0)$, (xy) vilkaarlig. Herved faas

Digitized by Google

$$\Phi_2(xy)\Psi_2(\xi\eta)+\Phi_2'(xy)\Psi_2'(\xi\eta)=\frac{1}{\Delta_2}\begin{vmatrix} 0 & \left(\frac{\partial^2 G_1}{\partial z^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 G_1}{\partial \bar{z}^2}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial^2 G_1}{\partial c^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^4 G_1}{\partial z^2 \partial c^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^4 G_1}{\partial \bar{z}^2 \partial c^2}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial^2 G_1}{\partial \bar{c}^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^4 G_1}{\partial z^2 \partial \bar{c}^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^4 G_1}{\partial \bar{z}^2 \partial \bar{c}^2}\right)_0 \end{vmatrix},$$

idet

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial^4 G_1}{\partial z^2 \partial c^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^4 G_1}{\partial \bar{z}^2 \partial c^2}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial^4 G_1}{\partial z^2 \partial \bar{c}^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^4 G_1}{\partial \bar{z}^2 \partial \bar{c}^2}\right)_0 \end{vmatrix},$$

er forskellig fra Nul, og

$$G_2=\begin{vmatrix} G_1 & \left(\frac{\partial^2 G_1}{\partial z^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 G_1}{\partial \bar{z}^2}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial^2 G_1}{\partial c^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^4 G_1}{\partial z^2 \partial c^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^4 G_1}{\partial \bar{z}^2 \partial c^2}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial^2 G_1}{\partial \bar{c}^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^4 G_1}{\partial z^2 \partial \bar{c}^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^4 G_1}{\partial \bar{z}^2 \partial \bar{c}^2}\right)_0 \end{vmatrix}.$$

Herved er, foruden G_2, Funktionerne Φ_2, Φ_2', Ψ_2, Ψ_2' bestemt, og man kan bevise, at de er analoge med A_2, A_2', B_2, B_2'. Ved at blive ved paa denne Maade kommer man til to Rækker af Funktioner (Φ_n, Φ_n') og (Ψ_n, Ψ_n'). Funktionerne Φ_n og Φ_n' bliver Nul af n^{te} Orden i $(x_0 y_0)$ og uendelige af n^{te} Orden i $(\xi_0 \eta_0)$. Ψ_n og Ψ_n' bliver derimod uendelige af n^{te} Orden i $(x_0 y_0)$ og Nul af n^{te} Orden i $(\xi_0 \eta_0)$. Tillige har Φ_n og Φ_n' ikke andre fælles Nulpunkter end $(x_0 y_0)$ og er endelige overalt med Undtagelse af Punktet $(\xi_0 \eta_0)$, medens Ψ_n og Ψ_n' har de analoge Egenskaber.

Endelig vil Funktionaldeterminanterne af henholdsvis Φ_n og Φ_n' og af Ψ_n, Ψ_n' have uforandret Tegn overalt, og Ligningerne $\Phi_n = \alpha$, $\Phi_n' = \alpha'$, hvor α og α' er vilkaarlige, har n og kun n reele Rødder; ligesaa Ligningerne $\Psi_n = \beta$, $\Psi_n' = \beta'$.

Analogien med Funktionerne (A_n, A_n') og (B_n, B_n') ses saaledes at være fuldstændig, og man kan med Rette betegne Funktionerne Φ_n og Φ_n' som »konjugerede«; ligesaa Ψ_n og Ψ_n'.

Indenfor de her betragtede specielle Funktioner faar man saaledes den fulde Analogi med de analytiske Funktioner ved

Digitized by Google

Par af Funktioner, som begge tilfredsstiller samme Differentialligning. Funktionerne i et Par af denne Art er ikke forbundne ved simple Differentialligninger saaledes som de sammenhørende Integraler til de to Differentialligninger (2) og (3).

Ved Hjælp af de saaledes fundne Funktioner kan man danne nye. Betragter man saaledes de to Udtryk

$$f = a_0 + \sum_{n=1}^{m} (a_n \Phi_n + a_n' \Phi_n'); \; f' = b_0 + \sum_{n=1}^{m} (b_n \Phi_n + b_n' \Phi_n'),$$

kan man søge at bestemme Konstanterne a og b saaledes, at f og f' bliver »konjugerede« ɔ: saaledes, at Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f'}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f'}{\partial x}$$

faar samme Tegn overalt. Det viser sig, at dette vil være Tilfældet, dersom de to Systemer af Ligninger

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ og } \frac{\partial f'}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial f'}{\partial y} = 0$$

har de samme Rødder, hvorved det er af Betydning, at hvert af de to Systemer viser sig at have netop $n - 1$ reelle Rødder.

Ved denne Opgave møder man imidlertid en væsentlig Afvigelse fra, hvad man kender fra de analytiske Funktioner. Hvis nemlig (f_1, f_1') og (f_2, f_2') er to Par af konjugerede, harmoniske Funktioner, vil ogsaa $\alpha f_1 + \beta f_2$ og $\alpha f_1' + \beta f_2'$ være konjugerede, men noget tilsvarende gælder ikke for Par af konjugerede Integraler til den betragtede almindeligere Ligning. Dersom der ogsaa i dette Tilfælde existerer en Operation, som kan kaldes Addition, maa den derfor defineres paa ganske anden Maade end ved de analytiske Funktioner.

Operationen: Multiplikation synes derimod ikke at være vanskelig at generalisere. Sandsynligvis kan man definere — paa en lineær Transformation med konstante Koefficienter nær — Produktet af to Funktionspar, hvoraf det ene er af n^{te}, det andet af m^{te} Orden, som et Funktionspar af Ordenen $n + m$, der har de samme Nulpunkter og Poler som de givne tilsammen.

Hidtil har der kun været Tale om Funktionspar af den Art, som svarer til rationale, analytiske Funktioner, og det er ogsaa

Digitized by Google

naturligt, at disse simple Funktioner, her ligesom i de analytiske Funktioners Theori, danner Udgangspunktet. Skal man dernæst gaa videre, bliver det nødvendigt at benytte Rækkeudviklinger og at komme ind paa Begrebet: Funktionernes Fortsættelse ud over visse mindre Omraader.

Den fundamentale Rækkeudvikling i de analytiske Funktioners Theori er den under (4) anførte for Funktionen P og den tilsvarende for P's konjugerede. Disse Rækker er konvergente, hvis $\frac{r}{\varrho} < 1$, divergent for $\frac{r}{\varrho} > 1$, og hvis $\frac{r}{\varrho} = 1$, vil Rækkerne middelkonvergere.

Den hertil svarende Rækkeudvikling maatte være

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_n(xy)\, \Psi_n(\xi\eta) + \Phi_n'(xy)\, \Psi_n'(\xi\eta)),$$

men om denne Rækkes Konvergens, og, i Tilfælde af Konvergens, om dens Sum, er jeg ikke i Stand til at sige noget afgørende. Hvis der ogsaa i denne Henseende er Analogi med de analytiske Funktioner, vil der være en vid Mark aaben for omfattende Undersøgelser.

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR UNE GÉNÉRALISATION DES FONCTIONS ZÉTAFUCHSIENNES

PAR

ARVID UHLER

Les fonctions zétafuchsiennes sont définies par les équations

$$f_\mu(zs_i) = \sum_{\nu=1}^{\nu=s} a_{\mu\nu}^{(i)} f_\nu(z) = (f_\nu z))\ S_i;\ (\mu = 1, 2 \ldots . s)$$

où s_i parcout les substitutions d'un groupe fuchsien g et S_i les substitutions d'un groupe G, isomorphe à g. Ces fonctions sont des cas spéciaux d'une classe plus générale des fonctions, définies par

$$f_\mu(zs_i) = \sum_{\nu=1}^{\nu=s} a_{\mu\nu}^{(i)}(z)\, f_\nu(z) = (f_\nu(z))\ S_i(z) \tag{1}$$

où $a_{\mu\nu}^{(i)}(z)$ sont des fonctions rationnelles.

Avant que nous montrions l'existence des fonctions de ce genre, nous considérons les conditions pour que les substitutions $S_i\ (z)$ forment un groupe $G(z)$, isomorphe au groupe g, duquel nous supposons qu'il a le cercle d'unité comme cercle limite. Soit P un polygone canonique correspondant au groupe g. Soit les substitutions fondamentales $s_1\ s_2 \ldots .\ s_n\ s_{a_1}\ s_{b_1} \ldots .\ s_{a_p}\ s_{b_p}$.

Si s est une substitution fondamentale elliptique il faut qu'on ait

$$S(z)\, S(zs) \ldots .\ S(zs^{l-1}) = 1. \tag{2}$$

Ceci a pour conséquence que les coefficients correspondants à $S(z)$ doivent être de la forme

Digitized by Google

$$a_{\mu\nu}(z) = \frac{\begin{vmatrix} P_{11}(z) \dots P_{\nu-1,1}(z)\ P_{\mu,1}(zs)\ P_{\nu+1,1}(z) \dots P_{n1}(z) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_{1n}(z) \dots P_{\nu-1,n}(z)\ P_{\mu,n}(zs)\ P_{\nu+1,n}(z) \dots P_{nn}(z) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_{11}(z) \dots P_{\nu-1,1}(z)\ P_{\nu,1}(z)\ P_{\nu+1,1}(z) \dots P_{n1}(z) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_{1n}(z) \dots P_{\nu-1,n}(z)\ P_{\nu n}(z)\ P_{\nu+1,n}(z) \dots P_{nn}(z) \end{vmatrix}}$$

où $P_{\mu\nu}(z)$ sont des fonctions rationnelles arbitraires.

De plus il faut qu'on ait la relation

$$(3) \quad \begin{aligned} &S_1(z)\,S_2(zs_1) \dots S_n(zs_1 \dots s_{n-1})\,S_{a_1}(zs_1 \dots s_n)\,S_{b_1}^{-1}(zs_1 \dots s_n s_{a_1} s_{b_1}^{-1}) \\ &S_{a_1}^{-1}(zs_1 \dots s_{a_1}^{-1})\,S_{b_1}(zs_1 \dots s_{a_1}^{-1}) \dots S_{b_p}(zs_1 \dots s_{a_p}^{-1}) = 1. \end{aligned}$$

S'il y a des substitutions paraboliques dans le groupe g, on peut choisir toutes les fonctions $P_{\mu\nu}(z)$, correspondantes aux substitutions elliptiques, et tous les autres coefficients arbitraires excepté ceux qui appartiennent à une substitution parabolique, qui alors sont déterminés par (3). S'il n'y a pas de substitutions paraboliques on n'a pas la même liberté quant au choix des coefficients. La relation (3) a alors un grand pouvoir de limitation.

Dans ce dernier cas on obtient facilement des fonctions $f_\mu(z)$ qui satisfont (1).

Posons

$$(4) \quad \xi_\mu(z) = \sum_i (H_\nu(zs^i))\ S_i^{-1}(z) \left(\frac{dzs_i}{dz}\right)^m$$

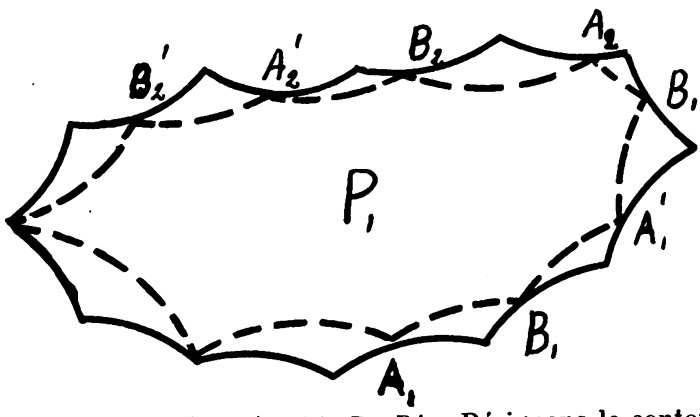
où $H_\nu(z)$ sont des fonctions rationnelles. Si m est suffisamment grand, ces séries convergent absolument et uniformément à l'intérieur du cercle d'unité, excepté pour certains pôles. Alors on obtient $f_\mu(z)$ comme le quotient d'une pareille série par une fonction thétafuchsienne.

Cependant s'il y a des substitutions paraboliques dans g, les séries (4) divergent et la méthode n'est pas applicable. On peut montrer l'existence des fonctions qui satisfont (1) en appliquant une méthode développée par Hilbert et Plemelj pour une solution du problème de Riemann.

Soit P un polygone canonique. Sur les côtés qui s'interchangent par l'intermédiaire des substitutions hyperboliques

Digitized by Google

nous prenons des points équivalents A_i, A_i', B_i, B_i'. Formons un polygone nouveau P_1, limité par des courbes analytiques entièrement situées à l'intérieur de P qui passent par les sommets



fixes et par les points A_i, A_i', B_i, B_i'. Désignons le contour par C^1. Par ce moyen on sépare de P $n + 4p$ triangles curvilignes qu'on peut par des substitutions déterminées de g changer en un domaine simplement connexe P_2 ayant un coté commun avec P_1. Soit C_2 le contour de P_2. P_1 et P_2 forment ensemble un domaine fondamental du groupe g.

Posons

$$\sigma_1 = s_{b_p}^{-1} s_{a_p}^{-1} s_{b_p};\ \sigma_2 = s_{b_p};\ \sigma_3 = s_{a_p};\ \sigma_4 = s_{a_p} s_{b_p}^{-1} s_{a_p}^{-1};$$

$$\sigma_5 = s_{b_{p-1}}^{-1} s_{a_{p-1}}^{-1} s_{b_{p-1}};\ \ldots\ \sigma_{4p} = s_{a_1} s_{b_1}^{-1} s_{a_1}^{-1};\ \sigma_{4p+1} = s_n;$$

$$\ldots\ \sigma_{4p+n} = s_1;$$

$$\sigma_i \sigma_{i-1} \ldots \sigma_1 = r_{i+1};\ (i = 1, 2 \ldots 4p + n).$$

Nous désignons les substitutions correspondantes de $G(z)$ par $\Sigma_i(z)$ et $R_i(z)$. r_i sont alors les substitutions, qui changent un côté de P_1 en un côté de P_2.

Maintenant nous pouvons formuler le problème ainsi qu'il suit: déterminer un système fondamental de fonctions $f_{\mu\nu}(z)$, analytiques à l'intérieur du cercle d'unité excepté pour des pôles et qui au long du contour de P_1 satisfont à

$$(f_{\mu\nu}(z r_H)) = (f_{\mu\nu}(z))\,(R_H(z)) \tag{5}$$

si l'on emploie des désignations de matrices. L'index H dépend du côté sur lequel z est situé. Cependent on peut ramener ce problème aux limites à ce qui suit: déterminer des fonctions

Digitized by Google

$\psi_{\mu\nu}(z)$ et $\chi_{\mu\nu}(z)$, analytiques à l'interieur de P_1 resp. P_2, éventuellement avec un nombre fini de pôles, et continues sur C_1 resp. C_2. Entre les valeurs aux contours C_1 et C_2 on aura la relation

$$(6)\quad (\chi_{\mu\nu}(z r_H)) = (\psi_{\mu\nu}(z))\,(\alpha_{\mu\nu}(z));\ (\psi_{\mu\nu}(z)) = (\chi_{\mu\nu}(z r_H))\,(\alpha_{\mu\nu}'(z));$$

où $\alpha_{\mu\nu}(z)$ et $\alpha_{\mu\nu}'(z)$ sont continues et un nombre fini du nombre de fois dérivable au long de C_1.

Pour obtenir cela, posons

$$(7)\qquad (f_{\mu\nu}(z)) = \sum_{H=1}^{H=4p+n} (\psi_{\mu\nu}(z))\,(v_{\mu\nu}^{(\sigma_H)}(z))$$

quand z est situé à l'intérieur de P_1 ou sur le contour C_1

$$(f_{\mu\nu}(z)) = \sum_{H=1}^{H=4p+n} (\chi_{\mu\nu}(z))\left(v_{\mu\nu}^{(\sigma_H)}(z r_H^{-1})\right)(R_H(z r_H^{-1}))$$

quand z est situé à l'intérieur de P_2 ou sur le contour C_2.

$$v_{\mu\nu}^{(\sigma_H)}(z) = \frac{y_{\mu\nu}^{(\sigma_H)}(z)}{[\varrho_{\sigma_H}(z)]}\, l_{\sigma_H};$$

où

$$\varrho_{\sigma_H}(z) = \left(\frac{z-p}{z-q}\right)^l$$

si σ_H est une substitution elliptique: $\dfrac{z'-p}{z'-q} = e^{\frac{2\pi i}{l}}\dfrac{z-p}{z-q}$ et p le point double qui est situé à l'intérieur du cercle d'unité.

$$\varrho_{\sigma_H}(z) = e^{\frac{2\pi i}{\gamma(z-p)}}$$

si σ_H est une substitution parabolique $\dfrac{1}{z'-p} = \dfrac{1}{z-p} + \gamma$.

Enfin si σ_H est une substitution hyperbolique:

$$\frac{z'-p}{z'-q} = K\frac{z-p}{z-q};$$

$\varrho_{\sigma_H}^{(z)}$ sera une fonction doublement périodique de $\log\dfrac{z-p}{z-q}$ avec les périodes $2\pi i$ et $\log K$ et avec seulement deux zéros essentiellement distincts, l'un situé dans le sommet entre les côtés, qui par r_H et r_{H+1} changent en des côtes de P_2, l'autre situé à l'ex-

Digitized by Google

térieur du cercle d'unité. Ou suppose que $\left(y_{\mu\nu}^{(\sigma_H)}(z)\right)$ est un système fondamental des solutions des équations aux différences

$$\left(y_{\mu\nu}^{(\sigma_H)}(z\,\sigma_H)\right) = \left(y_{\mu\nu}^{(\sigma_H)}(z)\right)(\Sigma_H(z)). \tag{8}$$

Si σ_H est elliptique, $y_{\mu\nu}^{(\sigma_H)}(z)$ sont des fonctions rationnelles. Si σ_H est parabolique on peut représenter $y_{\mu\nu}^{(\sigma_H)}(z)$ au moyen des séries de facultés ou des séries de Newton. Si σ_H est hyperbolique on peut représenter $y_{\mu\nu}^{(\sigma_H)}(z)$ par des séries de la forme

$$\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} (H_\nu(z\sigma_H^{(i)}))\,\Sigma_H^{-i}(z)\left[\frac{dz\sigma_H^i}{dz}\right]^m$$

Par un choix convenable du contour C_1, et en choisissant les entiers positifs l_{σ_H} suffisamment grands on peut, en tenant compte des rapports asymptotiques des fonctions $y_{\mu\nu}^{(\sigma_H)}(z)$, obtenir ce resultat que $(\alpha_{\mu\nu}(z))$ a les propriétés indiquées et tend vers la matrice d'unité, quand z tend vers un sommet arbitraire de P_1.

Montrons maintenant comment on peut ramener ce problème aux limites à un système d'équations intégrales de Fredholm.

Nous definissons une fonction $G(z, \xi)$ qui suit:

1) Considerée comme fonction de z elle sera une fonction théta-fuchsienne

$$G\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}, \xi\right) = (\gamma_i z + \delta_i)^2\, G(z, \xi)$$

avec des pôles dans $z = \xi$ et $z = a_i\ (i = 1, 2 \ldots m)$. Le résidu en $z = \xi$ est 1, en $z = a_i$ une fonction fuchsienne déterminée $g_i(\xi)$.

2) Considerée comme fonctions de ξ elle sera fuchsienne avec des pôles $z = \xi$ et $z = a_i\ \ (i = 1, 2 \ldots m + p - 1)$.

Nous supposons le contour C_1 choisi de telle manière que tous les points $z = a_i$ et $z = \alpha_i$ sont situés à l'intérieur de P_1.

Considérons alors

$$\Phi_1(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \psi(z)\, G(z, \xi)\, dz$$

où $\psi(z)$ est continue au long du contour C_1. Alors $\Phi_1(\xi)$ est une

Digitized by Google

fonction analytique à l'intérieur de P_1 excepté pour $\xi = a_i$. Si $\psi(z)$ est une fonction analytique à l'intérieur de P_1 on a

$$\Phi_1(\xi) = \psi(\xi) + \psi(a_1) g_1(\xi) + \ldots + \psi(a_m)\, g_m)(\xi).$$

Considérons alors

$$(9) \qquad \Phi(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} [\psi(z) - \psi(\xi)]\, G(z, \xi)\, dz - \psi(z) - \psi(a_1)\, g_1(\xi) \ldots . - \psi(a_m)\, g_m(\psi).$$

Si l'intégrale existe, quand ξ est situé sur C_1, on peut montrer que la condition nécessaire et suffisante, pour que $\psi(\xi)$ forme au contour les valeurs C_1 d' une fonction analytique à l'intérieur de P_1, est $\Phi(\xi) = 0$ pour chaque valeur ξ de C_1. Si la condition n'est pas satisfaite $\Phi(\xi)$, considérée comme fonction du point, équivalent à ξ, situé sur C_2, est la valeur an contour C_2 d'une fonction, analytique à l'intérieur de P_2.

De même nous considérons

$$(10) \qquad \varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} [\chi(z) - \chi(\xi)]\, G(z, \xi)\, dz.$$

En supposant que la fonction $\chi(\xi)$ continue au long de C_2 est de telle nature que l'intégrale existe, quand ξ est situé sur C_2, $\varphi(\xi) = 0$, pour chaque ξ situé sur C_2, est la condition nécessaire et suffisante pour que $\chi(\xi)$ soit la valeur au contour C_2 d'une fonction analytique à l'interieur de P_2. Si cette condition n'est pas satisfaite, $\varphi(\xi)$, considérée comme fonction du point, équivalent à ξ, situé sur C_1, est la valeur au contour C_1 d'une fonction analytique à l'intérieur de P_1 avec des pôles $\xi = a_i$

Nous pouvons écrire (10) de cette manière

$$\varphi(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} [\chi(z\gamma) - \chi(\xi)]\, G(z, \xi)\, dz$$

où r est la substitution qui change le côté sur lequel z est situé en un côté de P_2.

Posons maintenant

$$(11) \qquad -\Phi_\mu(\xi) + \sum_{H=1}^{H=S} \alpha_{\mu H}'(\xi)\, \varphi_H(\xi r) = 0$$

en supposant ξ situé sur C_1.

En employant les expressions d'intégrale de $\Phi_\mu(\xi)$ et $\varphi_H(\xi r)$

Digitized by Google

et en employant la relation (6) on obtient le système d'équations d'intégrales

$$\psi_\mu(\xi) + \psi_\mu(a_1)\, g_1(\xi) + \ldots + \psi_\mu(a_m)\, g_m(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \sum_{\nu=1}^{\nu=s} \psi_\nu z)\, A_{\mu\nu}(z, \xi)\, G(z, \xi)\, dz \tag{12}$$

où

$$A_{\mu\nu}(z, \xi) = \delta_{\mu\nu} - \sum_{H=1}^{H=s} a_{\mu H}'(\xi)\, \alpha_{H\nu}(z); \quad \delta_{\mu\nu} = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \Big\} \begin{matrix} \mu = \nu \\ \mu \neq \nu \end{matrix}.$$

On montre facilement que les solutions de ce système, si elles existent sont de telle nature que les intégrales en (9) et (10) existent. Cependant les solutions de ce système ne sont pas nécessairement des solutions du problème aux limites (6) Pour cela il est nécessaire et suffisant que $\Phi(\xi) = 0$. Si ce n'est pas le cas, on obtient au lieu de cela des solutions du problème aux limites (11).

Par une modification légère on peut obtenir une autre équation, qui résout seulement le problème aux limites (6).

Soit $f(z)$ une fonction fuchsienne avec pôles

$$\xi = b_i \qquad (i = 1, 2 \ldots m),$$

où tous les zéros sont situés à l'interieur de P_2 et considérons le problème aux limites

$$\chi_\mu(\xi r) = \sum_{H=1}^{H=S} \alpha_{\mu H}(\xi)\, [f(\xi)]^p\, \overline{\psi}_H(z). \tag{13}$$

Cela nous conduit au système

$$\overline{\psi}(\xi) + \overline{\psi}_\mu(a_1)\, g_1(\xi) + \ldots + \overline{\psi}_\mu(a_m)\, g_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \sum_{\nu=1}^{\nu=s} \psi_\nu(z)\, \overline{A}_{\mu\nu}(z, \xi)\, G(z, \xi)\, dz \tag{14}$$

où

$$\overline{A}_{\mu\nu}(z, \xi) = \delta_{\mu\nu} - \sum_{H=1}^{H=s} a_{\mu H}'(\xi)\, \alpha_{H\nu}(z) \left[\frac{f(z)}{f(\xi)}\right]^p.$$

Alors si nous posons

$$\overline{\Phi}_\mu(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} [\overline{\psi}_\mu(z) - \overline{\psi}_\mu(\xi)]\, G(z, \xi)\, dz - \overline{\psi}_\mu(\xi) - \overline{\psi}_\mu(a_1)\, g_1(\xi) - \ldots - \overline{\psi}_\mu(a_m)\, g_m(\xi)$$

$$\varphi_\mu(\psi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} [\chi_\mu(z) - \chi_\mu(\xi)]\, G(z, \xi)\, dz$$

Digitized by Google

nous obtenons des solutions soit du problème aux limites (13) soit de

$$-\overline{\Phi}_\mu(\xi)+\sum_{H=1}^{H=s}\frac{\alpha_{\mu H}'(\xi)}{[f(\xi)]^p}\overline{\varphi}_H(\xi r)=0;$$

Dans le dernier cas, en posant

$$\overline{\Phi}_\mu(\xi)=\Phi_\mu(\xi) \text{ et } \varphi_\mu(\xi r)=\frac{\overline{\varphi}_\mu(\xi r)}{[f(\xi)]^p}$$

le problème aux limites (11) aurait des solutions avec des zéros dans $\xi = b_i$ d'ordre p.

En ce cas-la

$$\Phi_\mu(\xi)[f(\xi)]^l;\ \varphi_\mu(\xi r)[f(\xi)]^l \quad (l=1,2\ldots p-1$$

seraient des solutions du problème aux limites (11). Cependent ce problème peut contenir seulement un nombre fini de solutions linéairement indépendantes. Si nous choissons p suffisamment grand il est néccessaire que les solutions de (14) soient des solutions du problème aux limites (13). En considérant le système associé par (14) on montre facilement que (14) a toujours des solutions.

En posant $$\psi_\mu(z)=[f(\xi)]^p\overline{\psi}_\mu(z)$$

nous obtenons des solutions du problème aux limites (6). Par cela nous obtenons aussi au moyen de (7) des solutions du problème aux limites (5).

En choissisant convenablement les constantes $\overline{\psi}_\mu(a_i)$ on peut former un système fondamental $(f_{\mu\nu}(z))$.

Digitized by Google

BEMERKUNG ÜBER DIE GENERALISIERUNG EINES ZWEIFACH SKALAREN VEKTORS FÜR EINEN VIER-DIMENSIONALEN RAUM

VON

ALMAR NÆSS

φ sei eine Funktion der Variablen x_1, x_2, x_3. Wie üblich nennen wir $\nabla\varphi$ einen Potentialvektor im R_3, wo

$$\nabla\varphi = \mathfrak{e}_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \mathfrak{e}_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \mathfrak{e}_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}$$

$\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ bezeichnen die Einheitsvektoren.

Wenn ψ eine andere Funktion ist, so wird

$$\psi\nabla\varphi$$

ein *zweifach skalarer Vektor* genannt.

Der Rotor (curl) dieses Vektorfeldes wird, *als Vektor dargestellt*, gleich:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{e}_1 & \mathfrak{e}_2 & \mathfrak{e}_3 \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi}{\partial x_2} & \frac{\partial\psi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \nabla\psi \times \nabla\varphi .$$

Ein Kriterium eines zweifach skalaren Vektors ist, dass er überall zu seinem curl senkrecht steht.

Drücken wir die Rotation als eine lineare antisymmetrische Transformation aus, mit der Matrix c_{ij}, so wird

$$c_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} - \frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Diese Matrix ist planar, da sie von dritter Ordnung ist. Das Kriterium lässt sich dann so aussprechen:

Digitized by Google

Der zweifach skalare Vektor im R_3 liegt überall in der Rotationsebene seiner Rotation.

Die Rotationsebene durch einen beliebigen Punkt ist durch die zwei von demselben Punkte ausgehenden Vektoren $\nabla\psi$ und $\nabla\varphi$ bestimmt. Die Winkelgeschwindigkeit ist gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks auf $\nabla\psi$ und $\nabla\varphi$ und der Sinn der Rotation ist derjenige von $\nabla\psi$ nach $\nabla\varphi$.

Seien nun ψ und φ zwei Funktionen der Variablen x_1, x_2, x_3, x_4. Dann definiert

$$(1) \qquad \psi\nabla\varphi = \mathfrak{e}_1\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \mathfrak{e}_2\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \mathfrak{e}_3\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + \mathfrak{e}_4\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_4}$$

einen *zweifach skalaren Vektor im R_4*.

Wir finden für die Matrix der Rotation dieses Feldes

$$(2) \qquad c_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} - \frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) \qquad i,j = 1,2,3,4.$$

Hieraus sehen wir sofort, dass diese Matrix in jedem Punkte planar ist. Entwickeln wir z. B. die Grösse C[1]), so zeigt sich, dass C identisch verschwindet.

D. h.: Die Rotation des Feldes ist in jedem Punkte einfach. Die Ebene der Matrix c_{ij} ist die Rotationsebene. Sie geht immer durch die zwei Potentialvektoren $\nabla\psi$ und $\nabla\varphi$. Hieraus folgt, dass der Vektor $\psi\nabla\varphi$ in jedem Punkt in der Rotationsebene seiner Rotation liegt. Die Winkelgeschwindigkeit ist (wie in R_3) gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks auf $\nabla\psi$ und $\nabla\varphi$, und der Rotationssinn ist derjenige von $\nabla\psi$ nach $\nabla\varphi$.

Wir können beweisen, dass wir das folgende Kriterium eines zweifach skalaren Vektors im R_4 aufstellen können:

Damit dass ein Vektor $\mathfrak{v} = \mathfrak{e}_i v_i$ im R_4 zweifach skalar, d. h. auf die Form $\psi\nabla\varphi$ überführbar, sein soll, ist hinreichend und notwendig:

1) *Die Rotation des Vektors muss einfach sein.*

2) *Der Vektor muss (in jedem Punkt des Feldes) in der Rotationsebene seiner Rotation liegen.*

Wir haben eben gezeigt, dass diese Bedingungen notwendig sind. Dass sie hinreichend sind, folgt sofort aus einem bekannten Satze der Analysis, nämlich:

---

[1]) Almar Næss, On Rotations in Four-space, § 1 (in diesem Kongressbericht).

Digitized by Google

n gegebene Funktionen v_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ der Variablen $x_1 \ldots x_n$ lassen sich immer in die Form

$$v_i = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

überführen, wenn — und nur wenn — den folgenden Gleichungen genügt wird:

$$v_\nu \left(\frac{\partial v_\mu}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\mu}\right) + v_\lambda \left(\frac{\partial v_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\nu}\right) + v_\mu \left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\nu} - \frac{\partial v_\nu}{\partial x_\lambda}\right) = 0$$

λ, μ, ν sind je drei der Zahlen 1, 2, ... n. Dies gibt also $\frac{1}{6} n (n-1)(n-2)$ Gleichungen, von denen $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ voneinander unabhängig sind.

Setzen wir hier $n = 4$, und der Kürze wegen:

$$\frac{\partial v_\mu}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\mu} = c_{\lambda\mu} = -c_{\mu\lambda}, \tag{3}$$

so erhalten wir vier Gleichungen, von denen drei unabhängig sind:

$$\begin{aligned}
&\qquad v_2 c_{34} - v_3 c_{24} + v_4 c_{23} = 0 \\
&-v_1 c_{34} \qquad + v_3 c_{14} - v_4 c_{13} = 0 \\
&\quad v_1 c_{24} - v_2 c_{14} \qquad + v_4 c_{12} = 0 \\
&-v_1 c_{23} + v_2 c_{13} - v_3 c_{12} \qquad = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Wir können nun zeigen, dass diese Gleichungen genau die zwei Bedingungen unseres Kriteriums enthalten.

Die Gleichungsdeterminante muss verschwinden. Wir erhalten:

$$\begin{vmatrix} 0 & c_{34} & -c_{24} & c_{23} \\ -c_{34} & 0 & c_{14} & -c_{13} \\ c_{24} & -c_{14} & 0 & c_{12} \\ -c_{23} & c_{13} & -c_{12} & 0 \end{vmatrix} \equiv (c_{12} c_{34} + c_{23} c_{14} - c_{13} c_{24})^2 \equiv C^2 = 0. \tag{5}$$

Aber die Rotation des Vektorfeldes $\mathfrak{v}$ ist durch die Matrix $c_{\lambda\mu}$ von (3) bestimmt. Dass die Grösse C gleich Null ist, bedeutet nur, dass diese Matrix planar sein soll. D. h.: Letztere Gleichung (5) sagt nur aus, dass die Rotation des Vektors $\mathfrak{v}$ einfach sein muss. Und da die Matrix der Rotation (d. h. $c_{\lambda\mu}$) planar ist, so können wir eine darauf absolut senkrechte planare Matrix angeben, und zwar die folgende:

Digitized by Google

$$(6) \qquad \left\| \begin{array}{cccc} 0 & c_{34} & -c_{24} & c_{23} \\ -c_{34} & 0 & c_{14} & -c_{13} \\ c_{24} & -c_{14} & 0 & c_{12} \\ -c_{23} & c_{13} & -c_{12} & 0 \end{array} \right\|$$

Die Relation (5) mag nun an die Stelle einer der drei unabhängigen Bedingungen (4) treten. Die zwei anderen Bedingungen mögen dann irgend welche zwei der vier Gleichungen (4) sein, z. B.:

$$(7) \qquad \begin{array}{rrrr} & v_2 c_{34} & - v_3 c_{24} & + v_4 c_{23} = 0 \\ - v_1 c_{34} & & + v_3 c_{14} & - v_4 c_{13} = 0. \end{array}$$

Diese aber drücken nur aus, dass $\mathfrak{v}$ zu der Ebene der Matrix (6) senkrecht ist, d. h.: in der Rotationsebene liegen muss. Das Kriterium ist somit bewiesen.

Anm. Wir hätten fragen können, wie der Rotor eines zweifach skalaren Vektors im R_3 (als Vektor dargestellt) für einen R_4 zu generalisieren wäre. Mittels des Begriffes »space complement« erhalten wir sofort den Ausdruck:

$$\text{Rot } \psi \nabla \varphi = \left| \begin{array}{cccc} \mathfrak{e}_1 & \mathfrak{e}_2 & \mathfrak{e}_3 & \mathfrak{e}_4 \\ \mathfrak{e}_1 & \mathfrak{e}_2 & \mathfrak{e}_3 & \mathfrak{e}_4 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} & \frac{\partial \psi}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} \end{array} \right|$$

Dies ist auch ein planarer Tensor zweiten Ranges, welcher in jedem Punkte die Achsenebene und die Winkelgeschwindigkeit der Rotation des Feldes bestimmt, also sowohl vom formalen als vom geometrischen Standpunkt aus vollkommen analog dem curl von $\psi \nabla \varphi$ in R_3 ist.

Berichtigung: Almar Næss, On Rotations in Four-Space (in diesem Kongressbericht). Im Satze § 2, Remark, soll es $+ C$ anstatt $- C$ heissen.

Digitized by Google

INDHOLDSFORTEGNELSE

Side

Beretning om Kongressens Forløb 7
Indledningstale ved Aabningsmødet. Af N. E. NØRLUND 15
Tale af Professor G. MITTAG-LEFFLER 27
Fortegnelse over Kongressens Medlemmer 45

KONGRESSENS VIDENSKABELIGE FORHANDLINGER

BOHR, NIELS: Atomic theory and mechanics 51
BJERKNES, V.: Fysisk Hydrodynamik (Uddrag) 71
WIMAN, A.: Über den Klassenkörper eines Abel'schen Zahlkörpers 73
NEVANLINNA, ROLF: Neuere Untersuchungen über den Picardschen Satz 77
NEVANLINNA, FRITHIOF: Über die Werteverteilung einer analytischen Funktion in der Umgebung einer isolierten wesentlich singulären Stelle 97
CARLEMAN, TORSTEN: Sur les équations intégrales singulières 109
JUEL, C.: F. Kleins Satz über die reellen Singularitäten einer algebraischen Kurve 119
GULDBERG, ALF: Über Markoff's Lemma 127
HJELMSLEV, J.: Die nicht-Eudoxische Mathematik 131
RIESZ, M.: Sur la valeur principale de Cauchy (Extrait) 141
KRAMERS, H. A.: On the behaviour af atoms in an electromagnetic wave field 143
JOHANNSEN, FR: Indledning til Magister Erlangs Foredrag 155
ERLANG, A. K.: Some applications of the method of statistical equilibrium in the theory of probabilities 157
BOHR, HARALD: Über allgemeine Fourier- und Dirichletentwicklungen 173
MYRBERG, P. J.: Über diskontinuierliche Gruppen und automorphe Funktionen von mehreren Variablen 191
FRISCH, RAGNAR: Impossibilité de reserrer l'inégalité de Markow dans le cas général 203
SKOLEM, TH.: Über die Dichte der Gitterpunkte in asymptotischen Umgebungen gewisser unendlicher Kurvenzweige 207
BRODÉN, T.: Einige Worte über aktuelle mathematische Prinzipfragen 229
LYCHE, R. TAMBS: Sur l'existence des solutions réelles et continues de l'équation fonctionelle d'Abel 241
NØRLUND, N. E.: Om Interpolationsrækker (Uddrag) 251

Digitized by Google

Side

MALMQUIST, FOLKE: Sur la détermination d'une classe de fonctions analytiques par leurs valeurs dans un ensemble donné de points 253
STØRMER, CARL: Nordlysets problem (Uddrag) 261
NIELSEN, JAKOB: Zur Topologie der geschlossenen Flächen 263
DANIELSSON, ÓLAFUR: Eine Lösung des Malfattischen Konstruktionsproblems 277
SCHIELDROP, EDGAR B.: Sur une notion de déviation non holonome et son application à la cinématique et la dynamique des systèmes matériels 281
BONNESEN, T.: Bevis for Kuglens Minimalegenskab (Uddrag) 309
NÆSS, ALMAR: On rotations in four-space determined by a skew-symmetric dyadic (Abstract) 311
NAGELL, TRYGVE: Sur une classe d'équations indéterminées 317
PALMQVIST, R.: On investigations into mortality based solely on numbers of deaths 321
STEFFENSEN, J. F.: On the mathematical foundations of actuarial science 329
HAGSTROEM, K.-G.: Un problème de limite de la statistique 345
FRISCH, RAGNAR: Semi-invariants de Thiele et moments d'ordre supérieur 365
LEHMANN, INGE: On the accuracy of interpolation 375
STRØMGREN, ELIS: Unsere Kenntnisse über die Bewegungsformen im Dreikörperproblem (mit einer Tafel) (Auszug) 383
BIRKELAND, RICHARD: Sur la formation de certains groupes de substitutions 385
CRAMÉR, HARALD: On some classes of series used in mathematical statistics 399
ORE, ØYSTEIN: Über die Theorie der algebraischen Körper 427
LINDEBERG, J. W.: Über die Korrelation 437
MOLLERUP, J.: Über die Bestimmung eines Systems von Konstanten und charakteristischen Funktionen einer Funktion zweier Variablen in Beziehung auf einen gegebenen Kern $K(s,t)$ 447
ANDERSEN, A. F.: Sur des suites régulières 457
ZEILON, NILS: Potentialprobleme in der Hydrodynamik 463
THALBERG, OLAF M.: On the geometric relation between the tangents in multiple points of certain algebraic curves 473
SCHOU, ERIK: Forsøg paa Udvidelse af Begrebet „Analytiske Funktioner" 479
UHLER, ARVID: Sur une généralisation des fonctions zétafuchsiennes.. 489
NÆSS, ALMAR: Bemerkung über die Generalisierung eines zweifach skalaren Vektors für einen vier-dimensionalen Raum 497

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

#a 510.6 Sk1 1925
Beretning udgiven af kongressens organis
3 2754 003 152 687

510.6
Sk1
1925
Skandinaviske
Matematikerkongres.

MATH SCI LIBRARY

Digitized by Google